

Übung zur Lehrkräfteweiterbildung Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe C5 (Lineare Unabhängigkeit binär)

(i) Gegeben seien die Vektoren p_1 bis p_9 aus \mathbb{F}_2^9 mit:

$$\begin{aligned}
 p_1 &:= 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 p_2 &:= 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 p_3 &:= 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 p_4 &:= 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 p_5 &:= 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_6 &:= 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 p_7 &:= 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 p_8 &:= 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_9 &:= 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Vektoren linear abhängig sind!

Lösungshinweis: Kombinieren Sie geeignete dieser Vektoren zum Nullvektor!

(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren q_1, q_2, q_3 und q_4 aus \mathbb{F}_2^5 linear unabhängig sind:

$$\begin{aligned}
 q_1 &:= 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 q_2 &:= 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 q_3 &:= 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 q_4 &:= 0 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{aligned}$$

Lösungsskizze

(i) Z.B. addieren sich p_1, p_3 und p_8 zum Nullvektor; auch gilt $p_2 + p_4 + p_7 + p_9 = 0$. Wenn man diese Abhängigkeiten nicht durch Ausprobieren findet, muss man das folgende Lineare Gleichungssystem lösen, das sich aus $\sum_{i=1}^9 c_i p_i = 0$ ergibt:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 c_1 + & c_2 + & c_3 + & c_4 + & c_5 & & & & = 0 \\
 & c_2 + & c_3 + & c_4 + & c_5 + & c_7 + & c_8 + & c_9 & = 0 \\
 c_1 + & & c_3 + & & & c_7 + & & c_9 & = 0 \\
 & & & c_4 + & & & & c_9 & = 0 \\
 & c_2 + & & & & c_6 + & & c_9 & = 0 \\
 & & & & & c_6 & & & = 0 \\
 & c_2 + & & & & & c_7 & & = 0 \\
 c_1 + & & c_3 & & & & & & = 0
 \end{array}$$

(ii) Aus $c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3 + c_4 q_4 = 0$ mit $c_i \in \mathbb{F}_2$ ergibt sich durch Komponentenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 c_1 &+ c_2 & & & & & & & = 0 \\
 c_1 &+ c_2 &+ c_3 &+ c_4 & & & & & = 0 \\
 & & & & c_4 & & & & = 0 \\
 c_1 & & & & & + c_4 & & & = 0 \\
 & & & & & & c_4 & & = 0,
 \end{aligned}$$

das nur die triviale Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ hat. Daher sind q_1, q_2, q_3, q_4 linear unabhängig.