

Übung zur Lehrkräfte Weiterbildung 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe C 4 (Lineare Abhängigkeit, Koordinaten/ Polynome, Matrizen)

1. $\vec{a} = 1 - x$, $\vec{b} = 1 + x$, $\vec{c} = x$ sind Vektoren im Vektorraum der Polynome über \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind. Prüfen Sie, ob die Vektoren \vec{b}, \vec{c} linear abhängig sind. Ist \vec{c} allein linear abhängig?

2. Untersuchen Sie, ob im Vektorraum der 2×2 - Matrizen über \mathbb{R} die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Ist A für sich allein linear unabhängig?

3. $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ ist eine (geordnete) Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad kleiner gleich 3.

a) Welches Polynom hat bezüglich \mathcal{B} den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

b) Wie lautet der zum Polynom $3 - 2x + 4x^3$ gehörige Koordinatenvektor?

4. Im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 ist $\mathcal{C} = (2, 1 + x, 1 - x^2)$ (geordnete) Basis.

a) Welches Polynom hat bezüglich \mathcal{C} den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

b) Wie lautet der Koordinatenvektor des Polynoms $1 + x + x^2$ bzgl. \mathcal{C} ?

5. a) Zeigen Sie, dass im Vektorraum der 2×2 - Matrizen über \mathbb{R}

$\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ eine geordnete Basis ist!

- b) Welche Matrix hat bez. \mathcal{D} die Koordinaten $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$?
- c) Welche Koordinaten bez. \mathcal{D} hat die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$?