Modulprüfung zur
Elementaren Algebra/Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrer an der FU

Dozent: V.Schulze Datum: 17.12.2021 Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Name	Vorname	Unterschrift	Matr.Nr.

Aufgabe	1	2	3	4		Punktsumme	Note
Punkte							

Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben.
Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben,
pro Aufgabe also maximal 10 Punkte; insgesamt also maximal 30 Punkte.
Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Aufgabe 1

(i) Gegeben sei die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man stelle π als Produkt elementefremder Zyklen dar.
Man stelle π als Produkt von Transpositionen dar.
Man stelle π^{-1} als Produkt elementefremder Zyklen dar.
(ii) Gegeben seien die beiden Permutationen $\pi_1 = (1,4)$ und $\pi_2 = (2,4,3)$.
Man bestimme eine Permutation π_3 , so dass gilt $\pi_1 \circ \pi_3 = \pi_2$.
Ist π_3 eindeutig bestimmt ?

Aufgabe 2

Die Teilmenge M von $\mathbb{R}$ sei definiert durch $M := \{2a + b\sqrt{5} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(i) Man zeige : M ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$.
Ist M ist ein Unterring von $(\mathbb{R}, +, .)$?
(ii) Die Abbildung $f : M \to \mathbb{Z}$ sei definiert durch
$f(2a + b\sqrt{5}) := a + b$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$
Man zeige : f ist bezüglich + ein Gruppenhomomorphismus.
Ist f surjektiv ?
Ist f injektiv ?.

Aufgabe 3

(i) Es bezeichne φ die Eulersche $\varphi-$ Funktion.
Man zeige : $\varphi(35) = 24$.
Gilt $3^{24} \equiv 3 \cdot 24 \pmod{35}$?
(ii) Man zeige mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:
Der ggT von 1001 und 497 ist 7.
Man zeige : $497 \cdot x \equiv 7 \pmod{1001}$ ist lösbar .
Man gebe eine Lösung von $497 \cdot x \equiv 7 \pmod{1001}$ an.

Aufgabe 4

(i) Man gebe ein irreduzibles normiertes Polynom $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad 4 an.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ Nullstelle von $f(x)$.
Man zeige : $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ ist Basis der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$.
(ii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ Nullstelle von $x^3 + 6x + 12 \in \mathbb{Q}[x]$
Man zeige : $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ ist Basis der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$.
Man stelle α^{-1} als Linearkombination der Basiselemente dar.