Aufgabe W1 (Analytische Geometrie des $\mathbb{R}^3$ – Ebene, Orthogonalität)

Sei E_1 die Ebene des $\mathbb{R}^3$, die durch die Punkte A, B, C mit den Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(mit den Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis) geht.
$\mathbb{R}^3$ sei mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen!

1. Bestimmen Sie die Ebene E_1 durch Angabe der Menge ihrer Ortsvektoren! (Die entsprechende Formel dürfen Sie ohne Beweis verwenden.)
2. Berechnen Sie den Ortsvektor $\vec{f_1}$ des Punktes $F_1 \in E_1$ mit der zusätzlichen Eigenschaft $\vec{f_1} \perp E_1$!

   Lösungshilfe: Beachten Sie, dass man sich bei $\vec{f_1} \perp E_1$ auf die Untersuchung von $\vec{f_1} \perp (\vec{b}-\vec{a})$ und $\vec{f_1} \perp (\vec{c}-\vec{a})$ beschränken kann. Berücksichtigen Sie aber die Forderung $\vec{f_1} \in E_1$ (nach Identifizierung von F_1 und $\vec{f_1}$).
3. Skizzieren Sie grob E_1 und $\vec{f_1}$ geometrisch!

Lösungsskizzen

zu Aufgabe 1

1. Nach der Dreipunkteformel gilt:

$$\begin{aligned} E_1 &= \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a})\mathbb{R} + (\vec{c} - \vec{a})\mathbb{R} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \lambda & - \mu \\ & \lambda \\ & \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

2. *1. Möglichkeit*

   Sei $\vec{f_1} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$! Ist $\vec{f_1}$ orthogonal zu $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{c} - \vec{a}$, so auch orthogonal zu allen Linearkombinationen dieser Vektoren, Daher kann man sich auf die Untersuchung von $\vec{f_1} \perp (\vec{b} - \vec{a})$ und $\vec{f_1} \perp (\vec{c} - \vec{a})$ beschränken (S. Lösungshinweis).
   Aus

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt $f_y - f_x = 0 = f_z - f_x$, also $f_x = f_y = f_z$. Da $F_1 \in E_1$, also

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_x \\ f_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \ -\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (\text{mit geeigneten} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

gelten soll, erhält man

$$f_x = \lambda = \mu = 1 - \lambda - \mu,$$

also $f_x = \frac{1}{3}$.
Wegen der Beweisrichtung notwendige Probe: Umgekehrt hat

$$\vec{f_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die benötigten Eigenschaften.

2. Möglichkeit;
Einen auf $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{c} - \vec{a}$ und damit auf allen Linearkombinationen dieser Vektoren, also auch auf der Ebene E_1, senkrecht stehenden Vektor $\vec{v}_1$ erhält man mittels Vektorprodukt:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun ein skalares Vielfaches von $\vec{v}_1$, das Ortsvektor eines Punktes von E_1 ist: Aus

$$\nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \ -\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (\text{mit geeigneten} \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R})$$

ergibt sich $\nu = \lambda = \mu = 1 - \lambda - \mu = 1 - 2\nu$, folglich $\nu = \frac{1}{3}$.

(Wegen der Beweisrichtung notwendige) Probe: Umgekehrt hat

$$\vec{f_1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die benötigten Eigenschaften.

Anmerkung: Dieses Ergebnis stimmt mit den folgenden Symmetrie - Überlegungen überein: A, B und C bilden ein bzgl. der drei Koordinatenachsen symmetrisch liegendes Dreieck, dessen Schwerpunkt den Ortsvektor

$$\vec{f_1} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

hat. Dass $\vec{f_1}$ auch Normalenvektor von E_1 ist, leuchtet wegen der gleichen Größe der Winkel zwischen $\vec{f_1}$ und den Koordinatenachsen anschaulich ein.

3. Z.B.: