Klausur 2.Teil (60 minütig) zur Lehrkräfteweiterbildung 'Lineare Algebra /Analytische Geometrie I' am 11.12.2019

Name, Vorname	Aufg.1 aus Teil 1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	%	Note
Punkte →							

Bearbeiten Sie bitte zwei der drei folgenden Aufgaben! Falls Sie alle drei Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche zwei Aufgaben gewertet werden sollen!** Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Das Resultat der 1.Teilklausur (Aufgabe 1) wird übernommen. Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit, Basis, lineare Abbildung, Kern)

(a) (i) (2 Punkte) Sind die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{aus} \quad \mathbb{R}^{(3,1)}$$

linear unabhängig oder linear abhängig? (Mit Begründung)

(ii) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Polynome $1-x, 1+x+x^2, 1-x^2$ aus dem Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind!

(b) Sei $f : V_1 \to V_2$ eine Abbildung des $K-$Vektorraums V_1 in den $K-$Vektorraum V_2. Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ein Erzeugendensystem von V_1.

(i) (3 Punke) Zeigen Sie, dass gilt:
Ist f surjektiv und linear, so ist $f(B) = \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ ein Erzeugendensystem von V_2 ! *Lösungshinweis:* Betrachten Sie zu $w \in V_2$ ein Urbild $v = \sum_{i=1}^{n} b_i\lambda_i$ und dann $f(v)$.

(ii) (2 Punkte) Begründen Sie: Ist B linear unabhängig und f injektiv und linear, dann ist $f(B) = \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ linear unabhängig. *Lösungshinweis:* Ohne Beweis dürfen Sie hier benutzen: Ist f injektiv und linear, so Kern $f = \{\mathfrak{o}\}$.

Aufgabe 3 (Basis, lineare Abbildung, Matrix, Kern)

Seien V ein $3-$dim Vektorraum über $\mathbb{R}$ und f ein Endomorphismus von V, also eine lineare Abbildung $f: V \to V$. Sei $U = b_3\mathbb{R}$ (mit $b_3 \neq \mathfrak{o}$) der Kern von f; ferner seien b_1 und b_2 linear unabhängige Vektoren aus V mit

$$(*) \quad f(b_1+b_2) = 2b_1 \quad \text{und} \quad f(b_1-b_2) = 2b_2 \quad \text{sowie} \quad U \cap < b_1, b_2 >= \{\mathfrak{o}\}.$$

(i) (3 Punkte) Bestimmen Sie $f(b_i)$ für $i \in \{1,2\}$!

(ii) (3 Punkte) Zeigen Sie: b_3 ist linear unabhängig von $\{b_1, b_2\}$.

(iii) (2 Punkte) Ist $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V ? (Mit Begründung!)

(iv) (2 Punkte) Geben Sie die Matrix $M_B^B(f)$ an, die f bzgl. der Basis B darstellt !

Aufgabe 4 (LGS mit Parameter, Endomorphismus, volles Urbild)

(a) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$(*) \left\{ \begin{array}{llllcl} \xi_1 & & +\xi_3 & & = & \alpha \\ & \xi_2 & & +\xi_4 & = & 1 \\ & \xi_2 & +\xi_3 & & = & 1 \\ \xi_1 & +\xi_2 & +\xi_3 & +\xi_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

(i) (2 Punkte) Geben Sie die erweiterete Koeffizientenmatrix von $(*)$ an und wandeln Sie diese in eine Matrix in Zeilenstufenform um!

(ii) (1 Punkt) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $(*)$ lösbar?

(iii) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems!

(iv) (2 Punkte) Bestimmen Sie im Fall der Lösbarkeit den Lösungsraum L von $(*)$!

(b) Seien $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^4$ und f ein Endomorphismus von V, für den gilt:

$$(\Diamond) \quad \left\{ \begin{array}{lclllll} f(b_1) & = & b_1 & & & +b_4 \\ f(b_2) & = & & b_2 & +b_3 & +b_4 \\ f(b_3) & = & b_1 & & +b_3 & +b_4 \\ f(b_4) & = & & b_2 & & +b_4 \end{array} \right. .$$

(i) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Matrix $M_B^B(f)$ von f ! Gibt es einen Zusammenhang mit Teil (a) dieser Aufgabe ?

(ii) (2 Punkte) Geben Sie das volle Urbild des Vektors

$$w := b_1 + b_2 + b_3 + 2b_4$$

unter f (als Linearkombinationen der Vektoren von B) an!
Lösungshinweis: Beachten Sie den Zusammenhang mit Teil (a)(iv)!

Lösungsskizzen:

Zu Aufgabe 2

(a) (i) Die Vektoren sind linear abhängig; denn es gilt: $v_3 = 2v_1 + v_2$. Hierauf kommt man durch genaues Hinsehen oder durch Auflösen der Gleichung $v_1\lambda + v_2\mu + v_3\nu = \mathfrak{o}$, die zum LGS

$$\begin{array}{cccccc} \lambda & +\mu & +3\nu & = & 0 \\ \lambda & & 2\nu & = & 0 \\ & \mu & +\nu & = & 0 \end{array}$$

und damit (mit z.B. $\mu = 1$) zu

$$\lambda = -2\nu = 2\mu = 2 \text{ und } \nu = -\mu = -1$$

führt. Eine Probe zeigt die Behauptung.
Alternativ folgt die Behauptung aus der Berechnung der Determinante der Matrix mit v_i als Spalten.

(ii) Aus dem Ansatz

$$(1-x)\alpha + (1+x+x^2)\beta + (1-x^2)\gamma = 0$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & = & 0 \\ -\alpha & +\beta & & = & 0 \\ & \beta & -\gamma & = & 0 \end{array} ,$$

aus dem $\alpha = \beta = \gamma$ und $3\alpha = 0$, also $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt.

(b) (i) Wegen der Surjektivität von f gibt es zu jedem $w \in V_2$ ein Urbild $v \in V_1$. Da B laut Voraussetzung Erzeugendensystem von V_1 ist, existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\lambda_i$. Es folgt (mittels Ausnutzung der Linearität von f):

$$w = f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} b_i\lambda_i) = \sum_{i=1}^{m} f(b_i)\lambda_i \in < f(B) > .$$

Also ist $f(B)$ Erzeugendensystem von V_2.

(ii) Wir beweisen die lineare Unabhängigkeit von $f(B)$ wie folgt: Sei $\sum\limits_{i=1}^{n} f(b_i)\lambda_i = \mathfrak{o}$. Zu zeigen ist $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Aus der Linearität von f ergibt sich $\mathfrak{o} = \sum\limits_{i=1}^{n} f(b_i)\lambda_i = f(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\lambda_i)$, nach dem Lösungshinweis dann $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\lambda_i \in \mathrm{Kern} f = \{\mathfrak{o}\}$ und, weil B Basis ist,

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0,$$

was zu zeigen war.

Anmerkung: Ist B Basis von V_1 und ist f linear und bijektiv, dann ist $f(B)$ als linear unabhängiges Erzeugendensystem eine Basis von V_2.

Zu Aufgabe 3

(i) Laut Definition des Kerns gilt $f(b_3) = \mathfrak{o}$. Wegen der Linerität von f ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} f(b_1) + f(b_2) & = & 2\,b_1 \\ f(b_1) - f(b_2) & = & 2\,b_2. \end{cases}$$

Aus diesem folgt durch Addition bzw. Subtraktion der Zeilen und Division durch 2:

$$f(b_1) = b_1 + b_2 \quad \text{bzw.} \quad f(b_2) = b_1 - b_2.$$

Mit einer Probe (!) folgt auch die Umkehrung.

(ii) Wäre b_3 aus $< b_1, b_2 >$, so stünde das im Widerspruch zur Voraussetzung $b_3 \neq \mathfrak{o}$ und $U \cap < b_1, b_2 >= \{\mathfrak{o}\}$. Also ist b_3 linear unabhängig von b_2, b_3.

(iii) Laut Voraussetzung sind b_1 und b_2 linear unabhängig und nach (ii) auch b_3 von diesen Vektoren. Daher ist $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabhängig und aus Anzahlgründen Basis des 3-dim Vektorraums V.

(iv) Die Spalten von $M_B^B(f)$ sind die Koordinatenvektoren von $f(b_i)$ in ihrer Darstellung bzgl. der Basis B. Also

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 4

(a) (i) Die zu $(*)$ gehörende Matrix

$$M_{\text{erw}} := \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

geht durch elementare Zeilenumformungen, z.B. mit

$$z_3 \rightsquigarrow \bar{z}_3 = z_3 - z_2 \quad \text{und} \quad z_4 \rightsquigarrow \bar{z}_4 = z_4 - z_1 - z_2$$

in die Matrix (in Zeilenstufenform)

$$C_{\text{erw}} := \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{array}\right) =: \big(C \mid c\big)$$

mit gleichem Lösungsraum über.

(ii) Aus der letzten Zeile der erweiterten Matrix in Zeilenstufenform sieht man, dass $(*)$ höchstens für $\alpha = 1$ lösbar ist. Wegen

$$\text{Rang } C = \text{ Rang } C_{\text{erw}}$$

ist das LGS für $\alpha = 1$ lösbar.

(iii) Für das homogene System, das durch die Zeilenumformungen ebenfalls nicht geändert wird, erhält man die Bedingungen $\xi_3 = \xi_4 = -\xi_2 = -\xi_1$, woraus (nach Probe)

$$L_0 = (-1, -1, 1, 1)\mathbb{R}$$

folgt.

(iv) Eine Partikulärlösung von $(*)$ im Fall $\alpha = 1$ ergibt sich aus $\xi_3 = \xi_4 = 1 - \xi_2 = 1 - \xi_1$, zum Beispiel als $p = (1, 1, 0, 0)$. (Probe zur Sicherheit!)

Aus $L = p + L_0$ und Teil (i) erhält man somit

$$L = (1, 1, 0, 0) + (-1, -1, 1, 1)\mathbb{R} = \{(1 - \xi, 1 - \xi, \xi, \xi) \,|\, \xi \in \mathbb{R}\}.$$

(b) (i) Die Matrix von f bzgl. der Basis B hat als Spalten die Koordinaten (bzgl. B) der Bilder der Vektoren von B. Sie ist somit

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist gleich der Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems aus Teil (a) für $\alpha = 1$.

(ii) Die Koordinatenvektoren der Vektoren des vollen Urbildes von

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$$

sind genau die Lösungen des linearen Gleichungssystems $(*)$ aus Teil (a) (mit $\alpha = 1$) und damit die Elemente von L. Also folgt

$$f^{-}(w) = b_1 + b_2 + (-b_1 - b_2 + b_3 + b_4)\mathbb{R}.$$