1.Teilklausur zum Modul
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' am 23.10.2019

Name, Vorname	Kennzeichen	Punkte für Aufg.1

Bearbeiten Sie bitte folgende Aufgabe! Zur vollständigen Lösung gehört auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. Für die vollständig gelöste Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte; die erzielte Punktezahl wird auf den folgenden zweiten Teil der Modulprüfung angerechnet, kann aber nicht auf weitere Nachprüfungen übertragen werden. **In der Vorlesung hergeleitete Sätze bzw. Formeln dürfen Sie hier ohne Beweis verwenden.**

Aufgabe 1 (Geraden in $\mathbb{R}^2$, Orthogonalität, Parallelität)

(a) Geben Sie unter Verwendung von Vektoren (mit konkreten Koordinaten bzgl. der Einheitsvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}$) die Gleichungen der folgenden Geraden im $\mathbb{R}^2$ an!

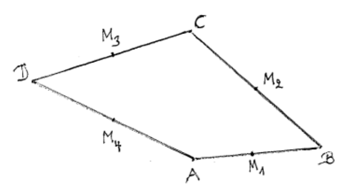
(i) (3 Punkte)

- g_1: die Gerade durch die Punkte mit den kartesichen Koordinaten $(3, 1)$ und $(4, 3)$.
- g_2: die Nullpunktgerade mit dem Richtungsvektor mit Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\vec{e_1}, \vec{e_2}}$
- g_3: die Gerade mit der Gleichung (in kartesischen Koordinaten) $\quad y = 2x + 3$.

(ii) (2 Punkte) Welche der Geraden g_1, g_2, g_3 sind parallel, welche orthogonal zueinander? (Mit Begründung!)(*Hinweis:* Ohne Beweis darf hier benutzt werden, dass orthogonale Geraden nicht parallel sein können und umgekehrt parallele Geraden nicht orhogonal.)

(b) Im $\mathbb{R}^2$ sei ein Viereck $\mathcal{E}$ durch die Ortsvektoren (bzgl. dem Nullpunkt) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ der Ecken A, B, C, D gegeben.

(i) (1 Punkt) Geben Sie die Ortsvektoren der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der vier Seiten von $\mathcal{E}$ an! (Dabei dürfen Sie die bekannte Formel für den Mittelpunkt einer Strecke ohne Beweis benutzen!)



(ii) (2 Punkte) Drücken Sie die Ortsvektoren der Mittelpunkte der beiden Strecken, die jeweils zwei gegenüberliegende Punkte M_1, M_3 bzw. M_2, M_4 verbinden, in Abhängigkeit von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ aus!

(iii) (2 Punkte) Vergleichen Sie diese Punkte! Was folgt für die Diagonalen des Vierecks $\mathcal{W} = M_1M_2M_3M_4$?

Lösungsskizze:

(a)
Im Folgenden seien alle Vektorkoordinaten bzgl. des Koordiantensystems $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ angegeben!.

(i) Durch Anwendung der 2-Punkte-Form der Geradengleichung erhält man:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\Big[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\Big] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$\text{bzw. } g_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\mathbb{R}.$$

Durch direkte Überlegung oder Anwendung der Punkt-Richtungsformel erhält man:

$$g_2 : \vec{x} = \ell\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\ell \in \mathbb{R}) \qquad \text{bzw.} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\mathbb{R}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\text{bzw. } g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\mathbb{R}\ .$$

(ii) g_1 und g_3 haben linear abhängige (sogar gleiche) Richtungsvektoren und sind daher parallel, aber nicht orthogonal zueinander.

g_1 und g_3 haben wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ zu g_2 orthogonale Richtungsvektoren.

Also gilt $g_2 \perp g_1,\ g_2 \perp g_3$ sowie $g_2 \nparallel g_1,\ g_2 \nparallel g_3$.

(b)

(i) Laut Vorlesung gilt für die Ortsvektoren $\vec{m_i}$ der Punkte M_i:
$\vec{m_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \qquad \vec{m_2} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \qquad \vec{m_3} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) \qquad \vec{m_4} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a})$.

(ii) Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{M_1M_3}$ bzw. $\overline{M_2M_4}$ haben (wieder durch Anwendung der Formel aus der Vorlesung zu sehen) die Ortsvektoren:

$$\frac{1}{2}\big[\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})\big] = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

sowie

$$\frac{1}{2}\big[\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a})\big] = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}).$$

(iii) Die betrachteten Punkte sind gleich. Daher gilt: Die Diagonalen des Vierecks $\mathcal{W} = M_1M_2M_3M_4$ halbieren sich.

Anmerkung: Man kann zeigen, dass die Geraden M_1M_2 und M_3M_4 parallel sind. Also ist $\mathcal{W}$ ein Parallogramm (Satz von Varignon). Man kann zeigen, dass sich in *jedem* Pararallelogramm die Diagonalen halbieren,