2.5 Lokale Extrema

Zur Erinnerung: Sei $\mathbb{R} \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 2-mal diff., $x \in U$ offen.

Notwendige Beding. für ein lokales Extremum bei x: $f'(x) = 0$.

Hinreichende " " " " " bei x: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$.

Genauer: f hat ein lokales $\begin{cases} \text{Max. bei } x \text{ wenn } f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0 \\ \text{Min. bei } x \text{ wenn } f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0. \end{cases}$

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ partiell diff., $x \in U$ offen.

Notw. Beding. für ein lokales Extremum bei x: $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$.

Hinreichende Bedingung??

Def: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell diff. Die Hesse-Matrix von f im Punkt $x \in U$ wird definiert durch

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}.$$

Bem:

i) $H_f(x)$ ist immer eine symmetrische Matrix (s. Satz 2.3.2).

ii) Für $n = 1$ ist $H_f(x)$ die 1×1 Matrix $(f''(x))$.

Satz 2.5.1: (Die Taylorformel 2. Ordnung)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell diff. und $x \in U$ offen. Dann:

$$f(x+h) = f(x) + \langle (\operatorname{grad} f)(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x) h, h \rangle + r(h) \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Vektoren als Spalten auffassen

[Für $n=1$: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x) h^2 + r(h)$ mit $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$] $\square$

Falls x ein kritischer Punkt von f ist lautet die obige Taylorformel $f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2} \langle H_f(x) h, h \rangle + r(h)$ mit $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0$.

Def: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix ($A = A^T$).

A heißt
- positiv definit wenn $\langle Au, u \rangle > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- negativ definit wenn $\langle Au, u \rangle < 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- indefinit wenn $\exists u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle Au, u \rangle < 0 < \langle Av, v \rangle$.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$.

$$\langle Au, u \rangle = \langle (\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n), (u_1, \dots, u_n) \rangle = \lambda_1 u_1^2 + \dots + \lambda_n u_n^2 \quad \forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- Falls alle $\lambda_i > 0$ sind, dann ist A positiv definit.
- Falls alle $\lambda_i < 0$ sind, dann ist A negativ definit.
- Falls $\exists i, j$ mit $\lambda_i > 0$ und $\lambda_j < 0$, dann ist A indefinit denn $\langle Ae_i, e_i \rangle = \lambda_i > 0$ und $\langle Ae_j, e_j \rangle = \lambda_j < 0$.
- Falls ein $\lambda_i = 0$, dann ist A weder positiv noch negativ definit denn $\langle Ae_i, e_i \rangle = 0$.

Satz 2.5.2 (hinreichende Beding. für ein lok. Extremum)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell diff, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein kritischer Punkt von f. Dann:

a) Ist $H_f(x)$ positiv definit, dann hat f ein lok. Minimum bei x.

b) Ist $H_f(x)$ negativ definit, dann hat f ein lok. Maximum bei x.

c) Ist $H_f(x)$ indefinit, dann hat f kein lok. Extremum bei x.

Beweis: Nach der Taylorformel 2. Ordnung gilt

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}\langle H_f(x)h, h\rangle + r(h) \text{ mit } \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|^2} = 0.$$

[$\|h\|$ klein genug sodass $x+h \in U$].

Zu a): Ang. $H_f(x)$ ist positiv definit.

Sei $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^n$.

S ist beschränkt (trivial) und abgeschlossen [$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2 - 1$ ist stetig (Polynom), $S = g^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{abgeschlossen in } \mathbb{R}})$ und Satz 2.2.11b)].

Also ist S kompakt.

Sei $N: S \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto \langle H_f(x)z, z\rangle$.

N ist stetig [$N(z)$ ist ein Polynom in $z_1, \dots, z_n$] und S kompakt $\underset{2.2.10}{\Longrightarrow}$

$\exists c \in S$ mit $N(z) \geq N(c)$ $\forall z \in S$.

$H_f(x)$ positiv definit $\Rightarrow \alpha := N(c) = \langle H_f(c), c\rangle > 0$.

Also $\langle H_f(x)z, z\rangle \geq \alpha > 0 \quad \forall z \in S$.

Sei $h \in \mathbb{R}^n$ beliebig, $h \neq 0$. $\langle H_f(x)h, h\rangle = \langle H_f(x)\|h\|\frac{h}{\|h\|}, \|h\|\frac{h}{\|h\|}\rangle$

$= \|h\|^2 \langle H_f(x)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle \geq \|h\|^2\alpha$ denn $\frac{h}{\|h\|} \in S \quad \forall h \neq 0$.

Also $\langle H_f(x)h, h\rangle \geq \alpha\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Sei $\delta > 0$ sodass $U_\delta(x) \subseteq U$ und $|r(h)| \leq \frac{\alpha}{4}\|h\|^2 \quad \forall h \in U_\delta(0)$. $\left[\frac{r(h)}{\|h\|^2} \to 0 \ (h \to 0)\right]$

Für $h \in U_\delta(0) \setminus \{0\}$ erhalten wir

$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}\langle H_f(x)h, h\rangle + r(h) \geq f(x) + \frac{\alpha}{2}\|h\|^2 + r(h) \geq$

$f(x) + \frac{\alpha}{2}\|h\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|h\|^2 = f(x) + \frac{\alpha}{4}\|h\|^2 > f(x)$. Also $f(x+h) > f(x)$

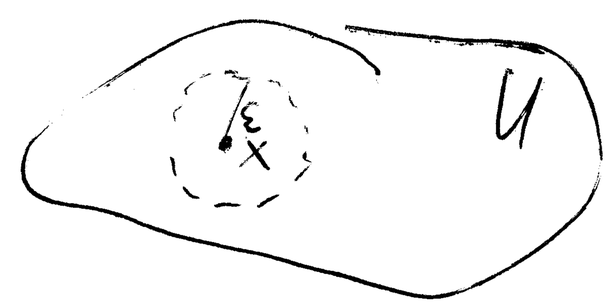
$\forall h \in U_\delta(0) \setminus \{0\}$ und f hat ein lokales Min. bei x.

Zu b): Der Beweis verläuft analog zum Beweis von a).

[Man betrachte diesmal das Maximum von $N: S \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \langle H_f(x)z, z\rangle$]

Zu c): Ang. $H_f(x)$ ist indefinit.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig mit $U_\varepsilon(x) \subseteq U$.



Z.z.: $\exists y_1, y_2 \in U_\varepsilon(x)$ mit $f(y_1) < f(x) < f(y_2)$.

$H_f(x)$ indefinit $\Rightarrow \exists z, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle H_f(x)z, z\rangle =: \beta > 0$ und

$\langle H_f(x)w, w\rangle := \gamma < 0$.

i) Für $t \in \mathbb{R}$ ($|t|$ klein genug) haben wir $f(x+tz) =$

$f(x) + \frac{1}{2}\langle H_f(x)tz, tz\rangle + r(tz) = f(x) + \frac{1}{2}t^2\langle H_f(x)z, z\rangle + r(tz) =$

$f(x) + \frac{1}{2}\beta t^2 + r(tz)$.

Sei $\delta > 0$ sodass $\delta < \varepsilon$ und $|r(h)| \leq \frac{\beta}{4\|z\|^2}\|h\|^2$ $\forall h$ mit $\|h\| < \delta$.

Mit $h = tz$ erhalten wir $|r(tz)| \leq \frac{\beta}{4\|z\|^2}t^2\|z\|^2 = \frac{\beta}{4}t^2$ für $|t|$ klein genug.

Also $f(x+tz) = f(x) + \frac{1}{2}\beta t^2 + r(tz) \geq f(x) + \frac{1}{2}\beta t^2 - \frac{1}{4}\beta t^2 = f(x) + \frac{1}{4}\beta t^2$

$> f(x)$ für $|t|$ klein genug, $t \neq 0$.

Es folgt $f(y_2) > f(x)$ für $y_2 := x + tz$ mit $|t|$ klein, $t \neq 0$.

ii) Man zeigt wie in i) dass $f(x+sw) < f(x)$ für $|s|$ klein genug, $s \neq 0$.

Es folgt $f(y_1) < f(x)$ für $y_1 := x + sw$ [$|s|$ klein, $s \neq 0$]. $\square$

<u>Lemma 2.5.3</u> (Kriterium für die Definitheit)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix ($A = A^T$). Dann:

a) $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ [x, y als Spalten aufzufassen]

b) Alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A sind reell.

c) Es gibt eine orthonormale Basis $v_1, \dots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A: $Av_i = \lambda_i v_i$ $\forall i \leq n$.

d)
- A ist positiv definit $\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.
- A ist negativ definit $\Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$.
- A ist indefinit $\Leftrightarrow \exists i, j$ mit $\lambda_i < 0 < \lambda_j$.

e) Sei $n=2$ und $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Sei $\Delta := \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

i) Wenn $a_{11} > 0$ und $\Delta > 0$, dann ist A positiv definit.
ii) Wenn $a_{11} < 0$ und $\Delta > 0$, dann ist A negativ definit.
iii) Wenn $\Delta < 0$, dann ist A indefinit.

<u>Beweis:</u> a) $\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = (x^T A^T) y = x^T (A^T y) \overset{\text{Asymmetrisch}}{=} x^T (Ay) = \langle x, Ay\rangle$.

b), c), d) können ziemlich leicht aus a) abgeleitet werden.

e) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A und $\{v_1, v_2\}$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$ mit $Av_1 = \lambda_1 v_1$ und $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Sei $O \in O(2)$ mit

$A = O\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} O^{-1} = O\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} O^T$.

$\Delta = \det(A) = \det\left(O\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} O^{-1}\right) \underset{\text{det ist multiplikativ}}{=}$

$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$.

i) Ang. $a_{11} > 0$ und $\Delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$.
$\lambda_1\lambda_2 > 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2 > 0$ oder $\lambda_1, \lambda_2 < 0)$. $\langle Ae_1, e_1\rangle = a_{11} > 0 \Rightarrow A$ ist nicht negativ definit $\overset{d)}{\Rightarrow} \exists i \in \{1,2\}$ mit $\lambda_i \geq 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \overset{d)}{\Rightarrow}$
A ist positiv definit.

ii) Ang. $a_{11} < 0$ und $\Delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$.
Man zeigt wie in i) dass A negativ definit ist.

iii) Ang. $\Delta = \lambda_1\lambda_2 < 0$. Dann gilt $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ oder $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.
Nach d) ist A indefinit. $\square$

Aus 2.5.2 und 2.5.3e) folgt unmittelbar:

Korollar 2.5.4: Sei $\mathbb{R}^2 \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell diff. und $(x,y) \in U$ offen ein kritischer Punkt von f.

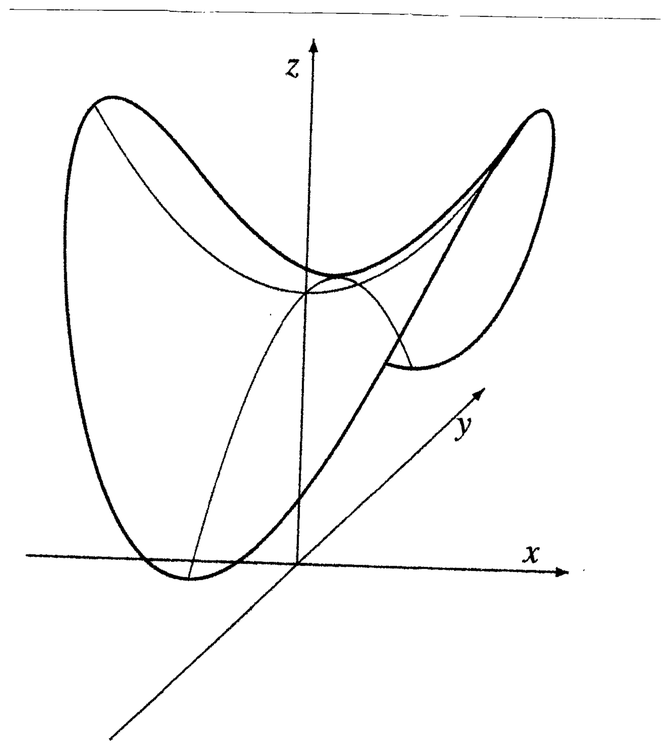
Sei $\Delta := \det H_f(x,y)$. Dann:

i) Falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$ und $\Delta > 0$, dann hat f ein lok. Min. bei (x,y).

ii) Falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) < 0$ und $\Delta > 0$, dann hat f ein lok. Max. bei (x,y).

iii) Falls $\Delta < 0$, dann hat f kein lok. Extremum bei (x,y).

Beispiele: 1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$.



$(\operatorname{grad} f)(x,y) = (2x, -2y) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$.

$(0,0)$ ist der einzige kritische Punkt von f.

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $\Delta = \det H_f(0,0) = -4 < 0$ (und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2$).

Also hat f kein lokales Extremum bei $(0,0)$.

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}$.

Bekannt (s. S. 52-53):

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}(8x - 8x^3 - 2y^2x)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-x^2-4y^2}(2y - 32x^2y - 8y^3)$.

Die kritischen Punkte von f sind $(0,0)$; $(\pm 1, 0)$; $(0, \pm \frac{1}{2})$.

Wir berechnen die Hesse-Matrix $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$. 69

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dots = 2e^{-x^2-4y^2}(-20x^2+8x^4+2y^2x^2+4-y^2).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dots = 2e^{-x^2-4y^2}(-34xy+32x^3y+8xy^3).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dots = 2e^{-x^2-4y^2}(-20y^2+128x^2y^2+32y^4+1-16x^2).$$ Also

$$\Delta = \det H_f(x,y) = 4(e^{-x^2-4y^2})^2 \begin{vmatrix} -20x^2+8x^4+2y^2x^2+4-y^2 & -34xy+32x^3y+8xy^3 \\ -34xy+32x^3y+8xy^3 & -20y^2+128x^2y^2+32y^4+1-16x^2 \end{vmatrix}.$$

Bei $(0,0)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2\cdot e^0 \cdot 4 = 8 > 0$ und $\Delta = 4\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 16 > 0$.

f hat bei $(0,0)$ ein lokales Minimum.

Bei $(\pm 1, 0)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1, 0) = 2e^{-1}(-20+8+4) = -16e^{-1} < 0$ und $\Delta = 4e^{-2}\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -15 \end{vmatrix}$ $= 480e^{-2} > 0$. f hat bei $(1,0)$ und $(-1,0)$ ein lokales Maximum.

Bei $(0, \pm\frac{1}{2})$: $\Delta = 4e^{-2}\begin{vmatrix} 15/4 & 0 \\ 0 & -5+2+1 \end{vmatrix} = 4e^{-2}\cdot\frac{15}{4}(-2) = -30e^{-2} < 0$.

f hat bei $(0,\frac{1}{2})$ und $(0,-\frac{1}{2})$ kein lokales Extremum.

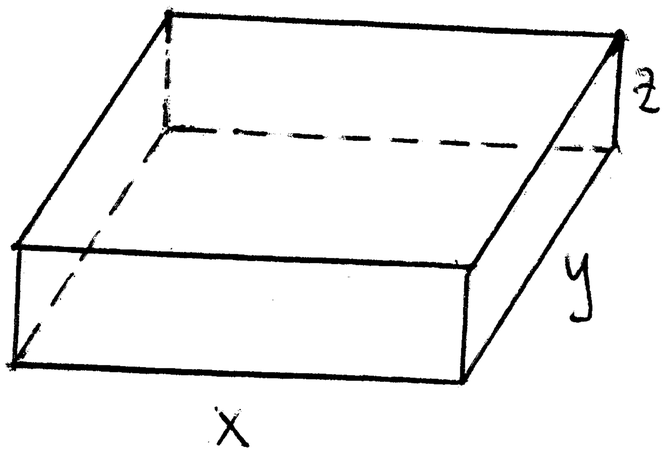
Bem: Da $f(x,y) = (4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2} \geq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $f(0,0) = 0$ ist es sofort klar, dass $(0,0)$ ein globales Minimum von f ist.

2.6. Lokale Extrema mit Nebenbedingungen

In den Abschnitten 2.3 und 2.5 haben wir notwendige und hinreichende Kriterien kennengelernt, um lokale Extrema einer Funktion $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ zu bestimmen [U offen].

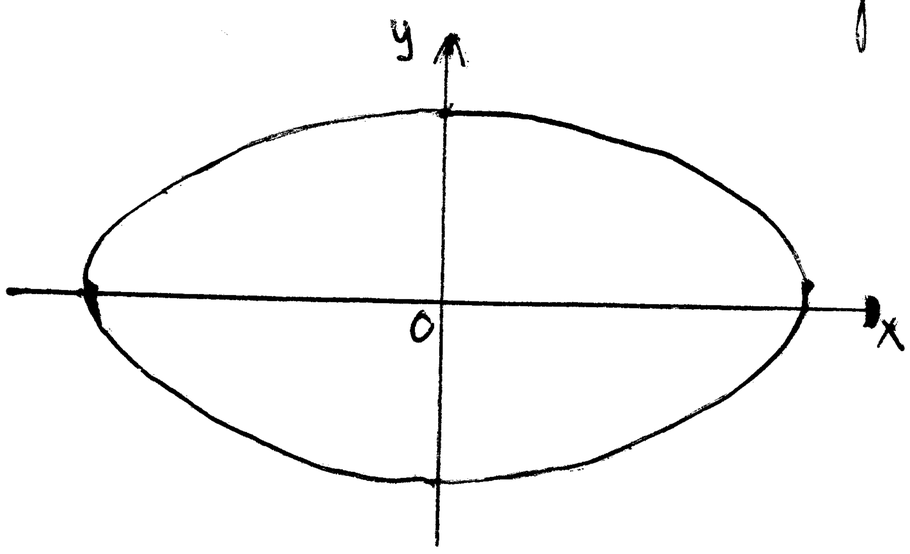
Oft sucht man jedoch die Extrema einer Funktion unter der Einschränkung, dass bestimmte Nebenbedingungen erfüllt sein müssen.

Beispiele: 1) Eine quaderförmige Kiste, die oben offen ist, hat ein Volumen von $32\,m^3$. Welche Ausmaße muss sie haben, damit die Oberfläche minimal ist?



$F(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \longrightarrow \text{Min}$
unter der Nebenbedingung $xyz = 32$.

2) Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.



$f(x,y) = x^2 + y^2 \longrightarrow$ Extremum unter der Nebenbedingung $x^2/4 + y^2 = 1$.

[$f(x,y)$ = Quadrat des Abstands von (x,y) zum Nullpunkt].

Aus der Skizze ist klar: Auf der Ellipse nimmt f ihr Max. bei $(2,0)$ und $(-2,0)$ und ihr Min. bei $(0,1)$ und $(0,-1)$ an.

Für eine saubere Begründung:

Weg 1: Einsetzen (Versuch).

$f(x,y) = x^2+y^2$ und $x^2/4 + y^2 = 1 \xrightarrow{\text{einsetzen}}$ Untersuchung von $g(x) := x^2+1-x^2/4 = \frac{3}{4}x^2+1$ auf lokale Extrema. $g'(x) = \frac{6}{4}x = 0$ $\Rightarrow x=0$. Also $y=\pm 1$ und wir kriegen 2 mögliche lokale Extrema für f bei $(0,1)$ und $(0,-1)$. $(2,0)$ und $(-2,0)$ sind verschwunden. D.h: Einsetzen ist nicht immer gut.

Weg 2: Mit Lagrangemultiplikatoren.

Satz 2.6.1:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ stetig partiell diff.
Sei $g: U \to \mathbb{R}$ stetig partiell diff. und

$$M := \{x \in U \mid g(x) = 0\} = N_g(0).$$

[$g(x)=0$ ist die Nebenbedingung]

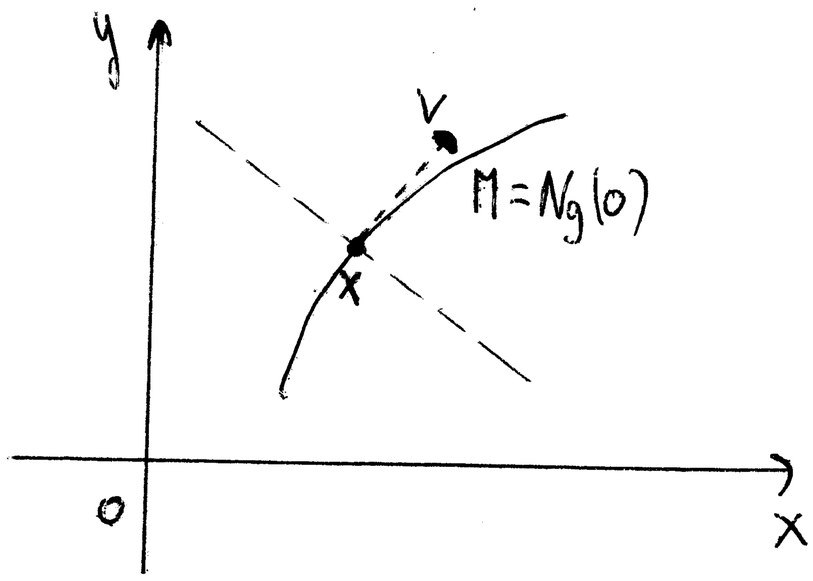
Sei $x \in M$ mit $(\operatorname{grad} g)(x) \neq 0$.

Besitzt $f|_M : M \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y)$ ein lokales Extremum bei x, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{(\operatorname{grad} f)(x) = \lambda (\operatorname{grad} g)(x)}$.

Lagrangesche Multiplikator

[Bem: Dieser Satz gibt nur eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f|_M$]

Beweisidee:



Arg. $n=2$: Da g stetig partiell diff. und $(\operatorname{grad} g)(x) \neq 0$ sieht die Höhenlinie $g=0$ in einer kleinen Umgebung von x wie eine glatte Kurve aus.

Sei v ein Tangentialvektor dieser Kurve an x.

i) Bekannt (s. Satz 2.4.6): $(\operatorname{grad} g)(x) \perp N_g(0)$. Also $\langle (\operatorname{grad} g)(x), v \rangle = 0$.

ii) $f|_M$ hat ein lokales Extremum bei $x \Rightarrow (D_v f)(x) = 0 \Rightarrow$

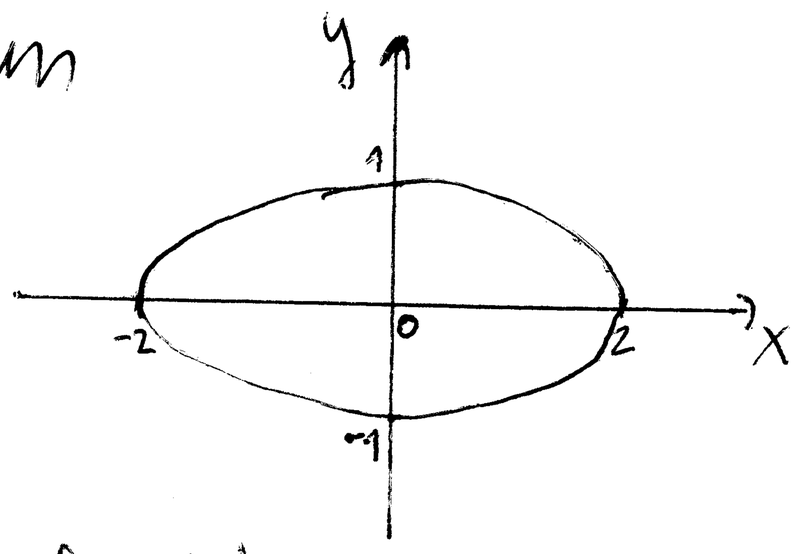
$$\langle (\operatorname{grad} f)(x), v \rangle \overset{2.4.5}{=} (D_v f)(x) = 0.$$

Also $\left.\begin{array}{l} \langle (\operatorname{grad} g)(x), v \rangle = 0 \\ \langle (\operatorname{grad} f)(x), v \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\operatorname{grad} f)(x) = \lambda (\operatorname{grad} g)(x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

$n > 2$: Der Beweis verläuft analog wie für $n=2$: $M = N_g(0)$ sieht lokal bei x wie eine $(n-1)$-dimensionale "Fläche" aus. $\square$

Zurück zu den 2 Beispielen:

Zu 2): $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 \longrightarrow$ Extremum unter der Nebenbedingung $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$



[Also $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$]

$M = N_g(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0\}$ ist die obenstehende Ellipse.

$(\operatorname{grad} g)(x,y) = (\frac{x}{2}, 2y) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in M.$

Notwendige Beding. für ein lokales Extremum von $f|_M$:

$$(\operatorname{grad} f)(x,y) = \lambda (\operatorname{grad} g)(x,y).$$

Also $(2x, 2y) = \lambda(\frac{x}{2}, 2y)$. $\begin{cases} 2x = \lambda \frac{x}{2} \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2/4 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)x = 0 & (1) \\ (1-\lambda)y = 0 & (2) \\ x^2/4 + y^2 = 1. & (3) \end{cases}$

Fall 1: $\lambda \neq 4$. $(1) \Rightarrow x = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Daher die 2 Kandidaten $(0,1)$ und $(0,-1)$. [(2) ist erfüllt für $\lambda = 1$]

Fall 2: $\lambda = 4$. $(2) \Rightarrow y = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Also die Kandidaten $(2,0)$ und $(-2,0)$.

Insgesamt hat $f|_M$ 4 mögliche lokale Extremstellen:

$$(2,0), (-2,0), (0,1), (0,-1).$$

f stetig und M kompakt $\overset{2.2.10}{\Rightarrow}$ $f|_M$ nimmt ihr Max. und Min. an.

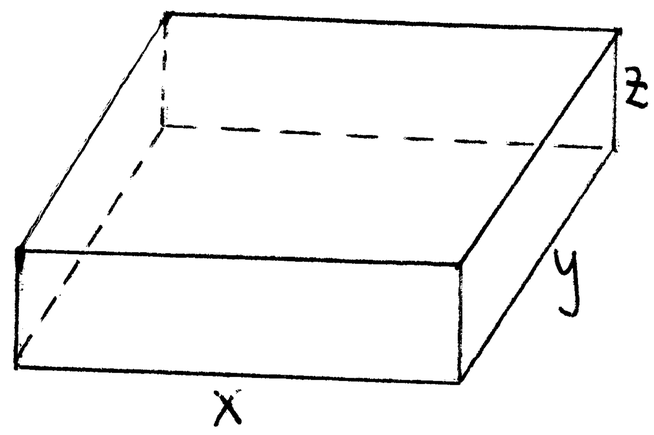
$\left.\begin{array}{l} f(2,0) = f(-2,0) = 4 \\ f(0,1) = f(0,-1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ die Extremwerte von $f|_M$ sind 1 und 4.

Zu 1): $f:]0,\infty[^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \to \text{Min}$

unter der Nebenbedingung $xyz = 32$.

[Also $g(x,y,z) = xyz - 32$].

$M = N_g(0) = \{(x,y,z) \in]0,\infty[^3 \mid xyz = 32\}$.



$(\text{grad}\, g)(x,y,z) = (yz, xz, xy) \neq (0,0,0) \quad \forall (x,y,z) \in M.$

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f|_M$ bei $(x,y,z) \in M$: $(\text{grad}\, f)(x,y,z) = \lambda (\text{grad}\, g)(x,y,z)$.

Also $(y+2z, x+2z, 2x+2y) = \lambda(yz, xz, xy) \Rightarrow$

$$\begin{cases} y+2z = \lambda yz \\ x+2z = \lambda xz \\ 2x+2y = \lambda xy \\ xyz = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yx+2xz = \lambda xyz \\ xy+2yz = \lambda xyz \\ 2xz+2yz = \lambda xyz \\ xyz = 32 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2xz = 2yz \overset{z\neq 0}{\Rightarrow} x = y.$

$\Rightarrow xy = 2xz \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} y = 2z.$

$\Rightarrow (2z)(2z)z = 32 \Rightarrow$

$4z^3 = 32 \Rightarrow z^3 = 8 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = y = 4.$

$(x,y,z,\lambda) = (4,4,2,1)$ erfüllt die 4 obigen Gleichungen $\Rightarrow$ $(4,4,2)$ ist der einzige Kandidat für ein lokales Min. von $f|_M$.

Es lässt sich zeigen, dass $f|_M$ bei $(4,4,2)$ ihr Minimum annimmt [man untersuche $f(x,y,z)$ für die (x,y,z) aus M sehr nah an $\partial(]0,\infty[^3)$ und benutze 2.2.10].