## 2.3 Partielle Ableitungen

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein beliebiger (aber fester) Punkt aus $\mathring{D}$ und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

**Def:** Die partielle Ableitung von $f$ nach $x_i$ im Punkte $x$ wird definiert (falls existent) durch

als Variable aufzufassen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} \qquad \left[ e_i = (0, \dots, 0, \overset{\text{i-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0) \right]$$

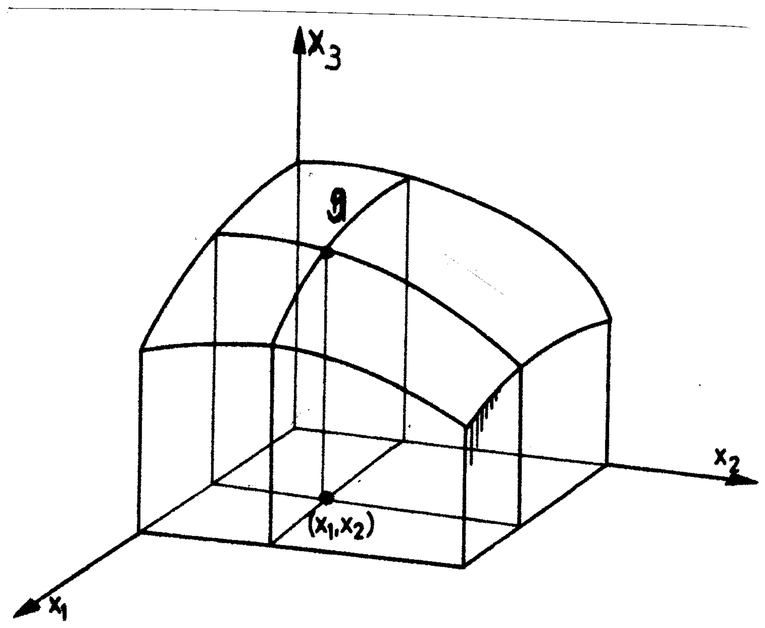
$= g'(x_i)$, wobei $g(t) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$. $[x \in \mathring{D} \Rightarrow g$ ist definiert in $]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[$ für $\varepsilon > 0$ klein genug$]$

Veranschaulichung für

$f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = g'(x_1)$, wobei

$g(t) := f(t, x_2)$.




**Bem:**

i) Da $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g'(x_i)$ (s. oben) gelten für $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ analoge Rechenregeln wie für die gewöhnlichen Ableitungen.

ii) Für Funktionen von 2 oder 3 Variablen schreibt man oft

$f(x,y)$ oder $f(x,y,z)$ (statt $f(x_1,x_2)$ oder $f(x_1,x_2,x_3)$).

Beispiele: 1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + 2y^2 - 3x\sin y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2+y^2}\cdot 2x + 0 - 3\sin y = 2xe^{x^2+y^2} - 3\sin y.$$

y als Konstante behandeln und nach x ableiten

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2+y^2}\cdot 2y + 4y - 3x\cos y.$$

x als Konstante behandeln und nach y ableiten

2) $f: (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z^2\sin(x^2+y^2) + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z^2\cdot\cos(x^2+y^2)\,2x + \frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = 2xz^2\cos(x^2+y^2) + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

y, z als Konstanten behandeln und nach x ableiten

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z^2\cos(x^2+y^2)\,2y + \frac{(-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y)}{(x^2+y^2)^2} = 2yz^2\cos(x^2+y^2) - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \sin(x^2+y^2)\cdot 2z + 0 = 2z\sin(x^2+y^2).$$

Def: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $U$ offen, $x \in U$.

a) $f$ heißt partiell differenzierbar in $x$ falls $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existiert für $i = 1, 2, \dots, n$.

b) $f$ heißt partiell differenzierbar falls $f$ partiell diff. in $x$ für alle $x \in U$ ist.

c) $f$ heißt stetig partiell differenzierbar falls $f$ partiell diff. und alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,2,\dots,n)$ stetig sind.

d) Falls $f$ partiell diff. in $x$ ist heißt

$(\operatorname{grad} f)(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ Gradient von $f$ im Punkte $x$.

<u>Satz 2.3.1:</u> (Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ partiell diff. in $x \in \mathring{D}$.

Besitzt $f$ in $x$ ein lokales Extremum, so gilt $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$.

<u>Beweis:</u> Sei $i \in \{1,\dots,n\}$ und $g(t) := f(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_n)$, $t \in ]x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon[$.

$f$ hat ein lokales Extremum in $x \Rightarrow g$ hat ein lokales Extremum in $x_i \overset{\text{Ana I}}{\Longrightarrow} g'(x_i) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = g'(x_i) = 0$. Also $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$. $\square$

<u>Def:</u> Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit $U$ offen und $f$ partiell diff.

$x \in U$ heißt <u>kritischer Punkt von $f$</u> falls $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$.

<u>Beispiel:</u> Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8xe^{-x^2-4y^2} + (4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}(-2x) = 2xe^{-x^2-4y^2}(4-(4x^2+y^2)).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{-x^2-4y^2} + (4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}(-8y) = 2ye^{-x^2-4y^2}(1-4(4x^2+y^2)).$$

Daraus folgt $(\operatorname{grad} f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(4-(4x^2+y^2)) = 0 & (1) \\ y(1-4(4x^2+y^2)) = 0. & (2) \end{cases}$

Fall 1: $x \neq 0$. ① $\Rightarrow 4x^2+y^2=4 \Rightarrow 1-4(4x^2+y^2)=-15 \neq 0$

$\overset{②}{\Rightarrow} y=0 \overset{①}{\Rightarrow} 4-4x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$. Für $x \neq 0$ haben wir die kritischen Punkte $(-1,0)$ und $(1,0)$.

Fall 2: $x=0$. ② $\Leftrightarrow y(1-4y^2)=0 \Leftrightarrow (y=0$ oder $y=\pm 1/2)$.

Für $x=0$ haben wir die 3 kritischen Punkte $(0,0), (0,\frac{1}{2}), (0,-\frac{1}{2})$.

Insgesamt hat $f$ 5 kritische Punkte: $(-1,0); (1,0); (0,0); (0,\frac{1}{2}); (0,-\frac{1}{2})$.

Def: (partielle Ableitungen 2. Ordnung)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ partiell diff ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen).

a) $f$ heißt 2-mal partiell diff. falls alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ wieder partiell diff. sind.

Notation: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ $(1 \leq i,j \leq n)$.

b) $f$ heißt 2-mal stetig partiell diff. wenn $f$ 2-mal partiell diff und alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ stetig sind.

Beispiel: Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 \sin(x+y)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(x+y) + x^2\cos(x+y)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(x+y)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\sin(x+y) + 2x\cos(x+y) + 2x\cos(x+y) + x^2(-\sin(x+y))$$
$$= (2-x^2)\sin(x+y) + 4x\cos(x+y).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2(-\sin(x+y)) = -x^2\sin(x+y).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\sin(x+y) + x^2\cos(x+y)\right) = 2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cos(x+y)\right) = 2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y).$$

Mithilfe des MWS (Ana I) kann man zeigen:

<u>Satz 2.3.2:</u> (H.A. Schwarz)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell diff (U offen).

Dann gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \forall x \in U \ \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}$. $\square$

## 2.4 Totale Differenzierbarkeit

Zur Erinnerung: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

$f$ heißt diff. in $a$ falls $f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existiert. (1)

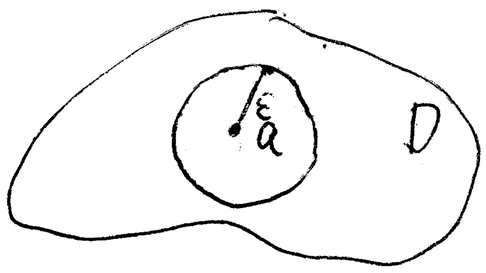
Diese Def. lässt sich nicht für Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ übertragen denn $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ist sinnlos [$f(a+h) - f(a) \in \mathbb{R}^m$ kann nicht durch $h \in \mathbb{R}^n$ dividiert werden]

Es lässt sich leicht zeigen (s. Üb), dass (1) zu (2) äquivalent ist:

(2): $\exists m \in \mathbb{R}$ sodass $f(a+h) = f(a) + mh + r(h)$, wobei

$r(h) := f(a+h) - f(a) - mh$ erfüllt $\lim_{h \to 0} r(h)/|h| = 0$.

**Def:** Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ und $a \in \mathring{D}$.




- $f$ heißt (total) differenzierbar in $a$ falls es eine Matrix $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert, sodass

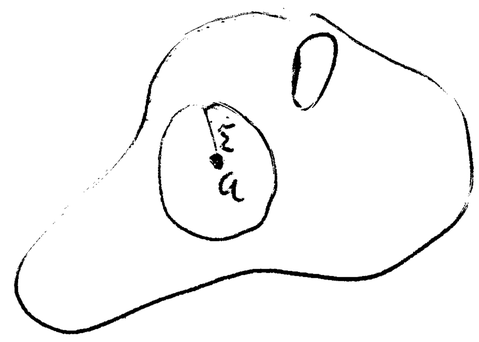
Vektoren als Spalten auffassen

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + \underbrace{Bh}_{\text{Matrixprodukt}}}_{\text{affin-linear in } h} + \underbrace{r(h)}_{\text{Rest}} \quad \forall h \in U_\varepsilon(0) \text{ und } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

- $f$ heißt diff falls $D = \mathring{D}$ und $f$ in jedem Punkt $a \in D$ diff ist.

**Bem:** Seien $f_i$ $(1 \le i \le m)$ die Komponenten von $f$: $f = (f_1, \dots, f_m)$.
Aus der Def. folgt leicht: $f$ ist diff. in $a \Leftrightarrow (f_i$ ist diff. in $a$ $\forall i \le m)$.

**Satz 2.4.1:** Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ diff. in $a \in \mathring{D}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sodass $f(a+h) = f(a) + Bh + r(h)$ $\forall h \in U_\varepsilon(0)$ und $\lim_{h \to 0} r(h)/\|h\| = 0$. Dann:




a) $f$ ist stetig in $a$.

b) Alle Komponenten von $f$ $f_i : D \to \mathbb{R}$ $(1 \le i \le m)$ sind in $a$ partiell diff. und es gilt $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = b_{ij}$ $\forall j \le n$.

**Beweis:** a) $f(a+h) = f(a) + Bh + r(h)$ $\forall h \in U_\varepsilon(0)$. $\lim_{h \to 0} Bh = 0$ und $\lim_{h \to 0} r(h) = \lim_{h \to 0} \|h\| \cdot (r(h)/\|h\|) = 0 \cdot 0 = 0$. Daraus folgt

$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)+0+0 = f(a)$. Also ist $f$ stetig in $a$.

b) Seien $f=(f_1,\dots,f_m)$ und $r=(r_1,\dots,r_m)$.

$f(a+h) = f(a)+Bh+r(h) \Rightarrow f_i(a+h) = f_i(a) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}h_j + r_i(h) \quad \forall h\in U_\varepsilon(0)$
$\forall i\leq m$.

Setze $h = te_j$ $(|t|<\varepsilon)$.

$f_i(a+te_j) = f_i(a) + tb_{ij} + r_i(te_j) \Rightarrow \dfrac{f_i(a+te_j)-f_i(a)}{t} = b_{ij} + \dfrac{r_i(te_j)}{t}$.

Also $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f_i(a+te_j)-f_i(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(b_{ij}+\dfrac{r_i(te_j)}{t}\right) = b_{ij} + \lim_{t\to 0}\dfrac{r_i(te_j)}{t}$

$= b_{ij}+0 = b_{ij}$ denn $\left(\lim_{h\to 0}\dfrac{r(h)}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\dfrac{r(te_j)}{|t|} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0}\dfrac{r(te_j)}{t} = 0\right)$.

Also $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = b_{ij} \quad \forall i\leq m\ \forall j\leq n$. $\square$

<u>Konsequenz</u>: Die Matrix $B$ in der Def. der Differenzierbarkeit ist eindeutig bestimmt und $B = (b_{ij}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$.

$B$ heißt Differential oder Jacobi-Matrix von $f$ im Punkt $a$.

<u>Schreibweise</u>:

$$(Df)(a) = J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

<u>Spezialfälle</u>:

$\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a\in D^\circ$.

i) $m=1$. $(Df)(a) = J_f(a) = (\operatorname{grad} f)(a)$.  ii) $n=1$. $J_f(a) = (f_1'(a),\dots,f_m'(a))^T$.

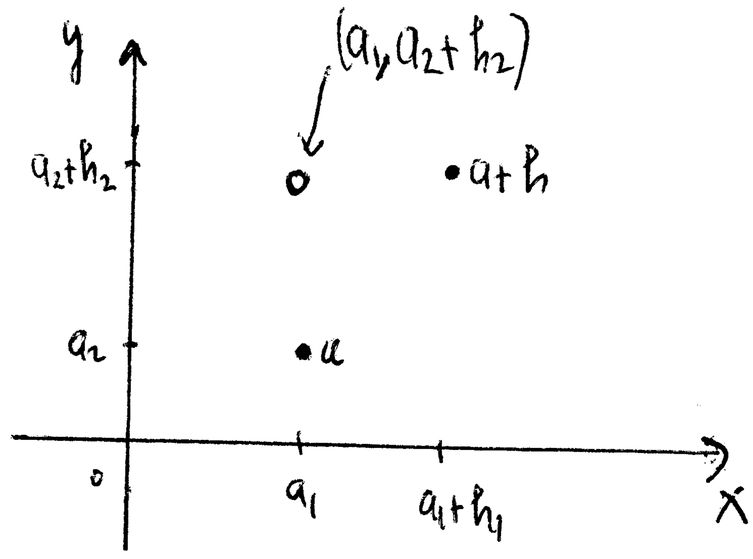
**Satz 2.4.2:** Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ partiell diff. und $a \in U$ offen. Alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ seien im Punkt $a$ stetig.

Dann ist $f$ diff. in $a$.

**Beweis:** Für $n = 2$.

z.z: $f(a+h) - f(a) = \overbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a)}^{(\operatorname{grad} f)(a)\cdot h} + r(h)$

mit $\lim\limits_{h \to 0} r(h)/\|h\| = 0$.




$$f(a+h) - f(a) \overset{\text{Trick}}{=} f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) \overset{\text{MWS, Ana I}}{=}$$

$$(a_1+h_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) + (a_2+h_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 h_2)$$

(für gewisse $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$)

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 h_2) =$$

$$h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) + \underbrace{h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right) + h_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)}_{r(h)}.$$

$$\frac{r(h)}{\|h\|} = \underbrace{\frac{h_1}{\|h\|}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right)}_{\xrightarrow{h \to 0}\ 0 \text{ (denn } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ stetig in } a)} + \underbrace{\frac{h_2}{\|h\|}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right)}_{\xrightarrow{h \to 0}\ 0 \text{ (denn } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ stetig in } a)}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$ Also ist $f$ diff. in $a$. $\square$

**Korollar:** Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ mit $U$ offen.

$f$ stetig partiell diff $\overset{2.4.2}{\Longrightarrow}$ $f$ diff $\overset{2.4.1}{\Longrightarrow}$ $f$ partiell diff und stetig.

Umkehrungen sind falsch. $\square$

**Satz 2.4.3** (Kettenregel)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $a \in U$ und $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \overset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cup\!\!\shortmid}{V}} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$.

Seien $f$ diff. in $a$ und $g$ diff. in $f(a)$.

Dann ist $g \circ f$ diff. in $a$ und $D(g \circ f)(a) = (Dg)(f(a)) \cdot (Df)(a)$. Matrixprodukt

**Beweis:** Laut Voraussetzung gilt

$$f(a+h) = f(a) + (Df)(a)h + r(h) \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 \text{ und}$$

$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + (Dg)(f(a))k + \tilde{r}(k) \text{ mit } \lim_{k \to 0} \frac{\tilde{r}(k)}{\|k\|} = 0.$$

Daraus folgt $(g \circ f)(a+h) = g(f(a+h)) = g(f(a) + \underbrace{(Df)(a)h + r(h)}_{= k})) =$

$$g(f(a)) + (Dg)(f(a)) \cdot ((Df)(a)h + r(h)) + \tilde{r}((Df)(a)h + r(h))$$

$$= (g \circ f)(a) + (Dg)(f(a))(Df)(a)h + \underbrace{(Dg)(f(a))r(h) + \tilde{r}((Df)(a)h + r(h))}_{= \tilde{\tilde{r}}(h)} \text{ für } \|h\| \text{ klein genug.}$$

Man zeigt dass $\lim_{h \to 0} \frac{\tilde{\tilde{r}}(h)}{\|h\|} = 0$. Also ist $g \circ f$ diff. in $a$

und $D(g \circ f)(a) = (Dg)(f(a)) \cdot (Df)(a)$.

$\square$

**Korollar 2.4.4:** Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbb{R} \supseteq I \xrightarrow{c} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Seien $f$ und $c$ diff., $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$.

Dann ist $f \circ c$ diff und $(f \circ c)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t))\, c_i'(t) \quad \forall t \in I$.

**Beweis:** $(Dc)(t) = (c_1'(t), \dots, c_n'(t))^T$, $(Df)(c(t)) = (\operatorname{grad} f)(c(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c(t))\right)$. Daraus folgt $(f \circ c)'(t) = (D(f \circ c))(t) \overset{2.4.3}{=} (Df)(c(t)) \cdot (Dc)(t)$

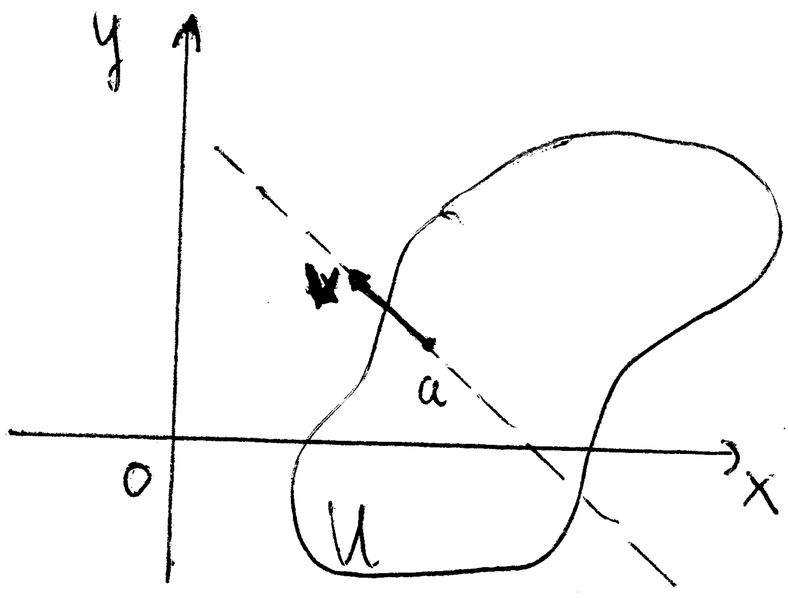
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c(t))\right) \cdot (c_1'(t), \dots, c_n'(t))^T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t))\, c_i'(t).$$

$\square$

**Def:** (Richtungsableitung)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$.

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor ($\|v\| = 1$).




Die Richtungsableitung von $f$ im Punkt $a$ in Richtung $v$ wird definiert (falls existent) durch

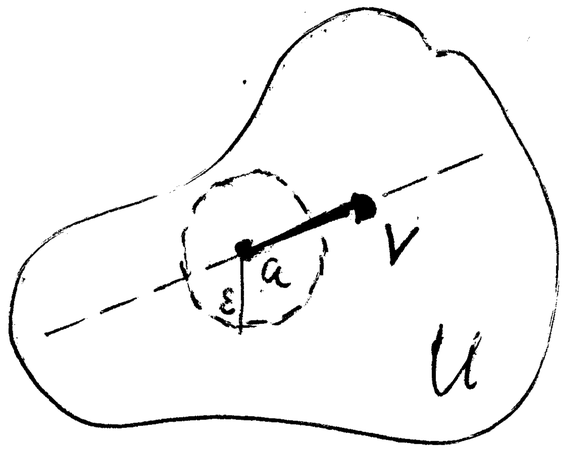
$$(D_v f)(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

**Bem:** $(D_{e_i} f)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ für $i = 1, 2, \dots, n$.

**Satz 2.4.5:** Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ diff.

Seien $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ und $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$.

Dann existiert $(D_v f)(a)$ und es gilt $(D_v f)(a) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), v \rangle$.




**Beweis:** Sei $c(t) := a + tv$, $c: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to U$.

$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$, wobei $c_i(t) = a_i + tv_i \ \forall i \leq n$.

$$(D_v f)(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(c(t)) - f(c(0))}{t} = (D(f \circ c))(0) \overset{2.4.3}{=}$$

$$(Df)(c(0)) \cdot (Dc)(0) = (Df)(a) \cdot (Dc)(0) = (\operatorname{grad} f)(a) \cdot (c_1'(0), \dots, c_n'(0))^T =$$

$$(\operatorname{grad} f)(a) \cdot (v_1, \dots, v_n)^T = \langle (\operatorname{grad} f)(a), v \rangle.$$

$\square$

**Bem:** Ang. $(\operatorname{grad} f)(a) \neq 0$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$. Es gilt (s. Üb)

i) $|\langle (\operatorname{grad} f)(a), v \rangle| \leq \|(\operatorname{grad} f)(a)\| \cdot \|v\| = \|(\operatorname{grad} f)(a)\|$.

ii) $|\langle (\operatorname{grad} f)(a), v \rangle| < \|(\operatorname{grad} f)(a)\| \cdot \|v\| = \|(\operatorname{grad} f)(a)\|$ wenn $(\operatorname{grad} f)(a)$ und $v$ nicht kollinear sind, also wenn $v \neq \pm \frac{(\operatorname{grad} f)(a)}{\|(\operatorname{grad} f)(a)\|}$.

Also ist $(D_v f)(a)$ maximal für $v = \frac{(\operatorname{grad} f)(a)}{\|(\operatorname{grad} f)(a)\|}$.

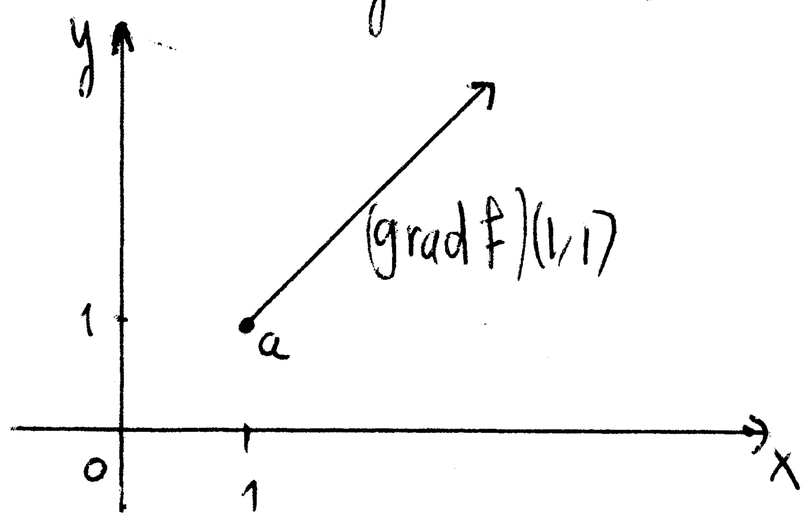
**Konsequenz:** Falls $(\operatorname{grad} f)(a) \neq 0$, dann gibt $(\operatorname{grad} f)(a)$ die Richtung des stärksten Anstiegs von $f$ im Punkt $a$ an.

$(\operatorname{grad} f)(a)$ wird als <u>Pfeil</u> mit Anfangspunkt $a$ gesehen.

**Beispiel:** Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$. Sei $a = (1,1)$.

$(\operatorname{grad} f)(x,y) = (2x, 2y) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$(\operatorname{grad} f)(a) = (2,2)$.



**Def:** (Niveaumenge, Niveaulinie)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ diff, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Die Niveaumengen von $f$ sind alle Mengen der Form

$$N_f(\alpha) := \{x \in U \mid f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $n=2$ nennt man die Niveaumengen auch Niveaulinien oder Höhenlinien.

**Satz 2.4.6:** Sei $\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ diff, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann:

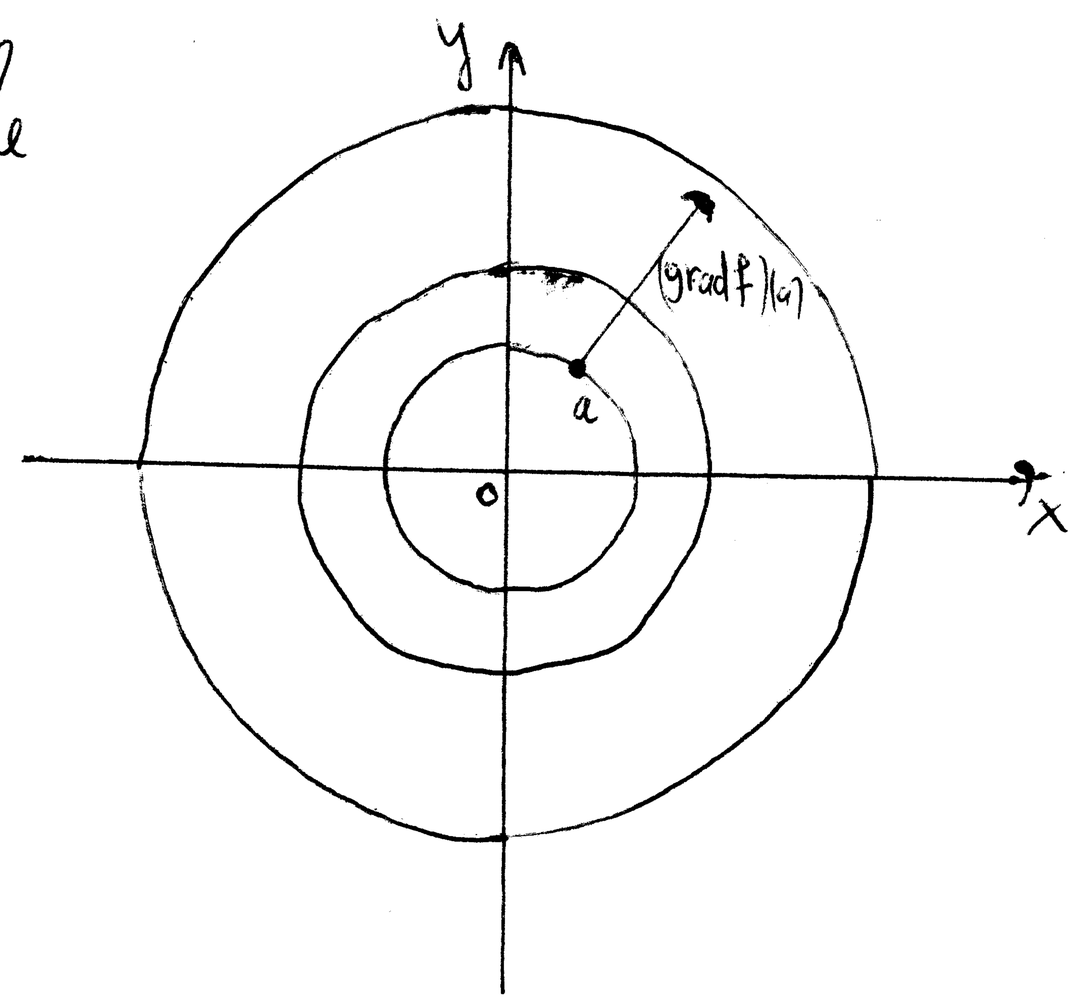
$$(\operatorname{grad} f)(a) \perp N_f(f(a)) \quad \forall a \in U \text{ mit } (\operatorname{grad} f)(a) \neq 0.$$

**Beweis:** S. Üb. $\square$

**Beispiel:** Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. $N_f(\alpha) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \alpha\}$

$$= \begin{cases} \text{Kreis mit Zentrum } (0,0) \text{ und Radius } \sqrt{\alpha}, & \text{wenn } \alpha \geq 0, \\ \emptyset, & \text{wenn } \alpha < 0. \end{cases}$$

Die Höhenlinien von $f$ sind also alle Kreise des $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(0,0)$.

$$(\operatorname{grad} f)(a) = 2a \quad \forall a \in \mathbb{R}^2.$$