2. Mehrdimensionale Analysis

2.1 Topologie im $\mathbb{R}^n$

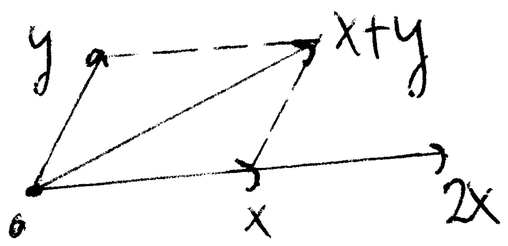
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.

Die Elemente aus $\mathbb{R}^n$ besitzen die Form $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Addition: $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

Skal. Mult: $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.



Bem: Elemente $x \in \mathbb{R}^n$ werden als Punkte (und nicht Vektoren) aufgefasst werden.

Kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$: $e_1, e_2, \dots, e_n$ wobei $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)$, $1 \leq i \leq n$.

Hauptziel dieses Kapitels besteht darin, eine Differentialrechnung für Abbildungen $f: D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ zu entwickeln, also für Abbildungen von n Variablen.

Beispiele von Abbildungen $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$

1°) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. $[f(x,y) =$ Abstand von (x,y) zu $(0,0)]$

2°) $V:]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}$, $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. $[V(r,h) =$ Volumen von $]$

3°) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ $\quad$ $T =$ Temperatur.

$(x,y,z,t) \mapsto T(x,y,z,t)$

$(\underbrace{x, y, z}_{\text{Ortsvariablen}}, \underset{\text{Zeit}}{t}) \in \mathbb{R}^4$.

4°) $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$. [Schraubenlinie:]

5°) $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. [$A(a_1, \dots, a_n)$ = arithmetisches Mittel von $a_1, a_2, \dots, a_n$]

$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$

Def: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$.

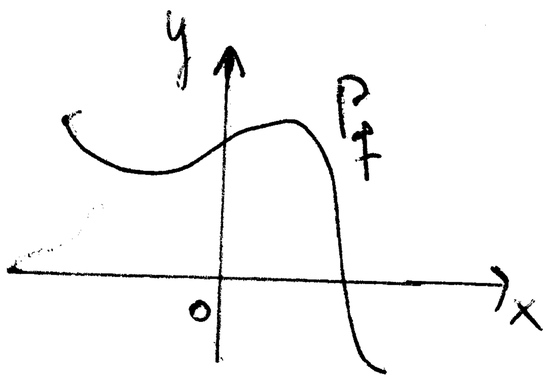
i) Der Graph von f wird definiert durch

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}.$$

ii) Das Bild von f wird definiert durch $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

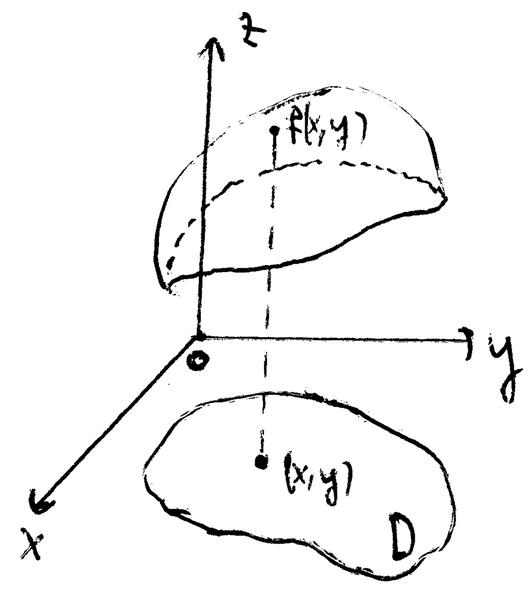
Beispiele:

$n = m = 1$:



$n = 2, m = 1$

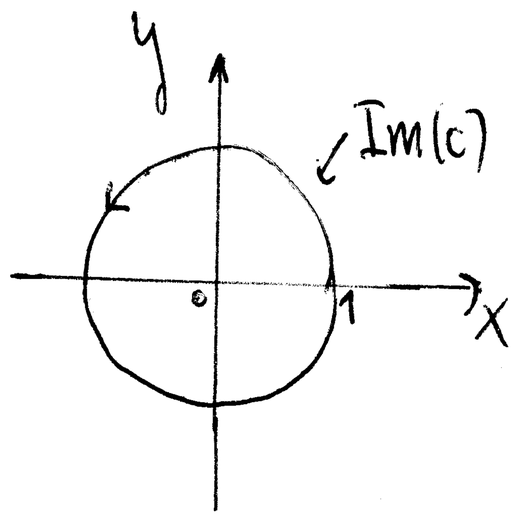
Γ_f = Fläche im Raum.



$n = 1, m = 2$:

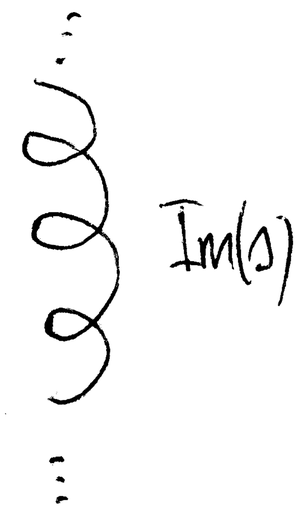
$c(t) = (\cos t, \sin t)$,

$c: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$.



$n = 1, m = 3$:

$s(t) = (\cos t, \sin t, t)$.



Def: (Norm, Betrag)

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ heißt Norm (Betrag) von x.

$\|x\|$ ist der Abstand von x zu $0 = (0, \dots, 0)$.

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ der Abstand von x zu y.

Bem: Für $n=1$ gilt $\|x\| = |x|$.

Def: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Das (Standard)skalarprodukt von x, y wird definiert durch $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Es gilt stets $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ und $\langle\, ,\, \rangle$ ist bilinear und symmetrisch.

Lemma 2.1.1 (Eigenschaften von $\|\ \|$ und $\langle\, ,\, \rangle$)

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten

a) $\|x\| \geq 0$ und $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

c) $|x_k| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

d) $|\langle x, y\rangle| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\|$.

e) $\|x+y\| \overset{\Delta}{\leq} \|x\| + \|y\|$.

Beweis: a), b), c) trivial. d) s. Übung.

e) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow$
$\langle x+y, x+y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\|$
$+ \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \underset{\text{folgt unmittelbar aus d)}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\|$. $\square$

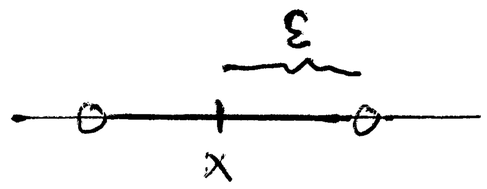
Def: (ε-Umgebung)

Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$.

Dann wird definiert $U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\}$.

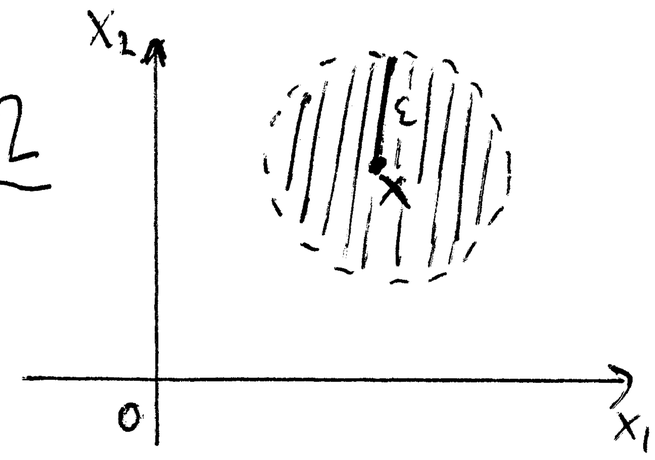
$U_\varepsilon(x)$ heißt (offene) ε-Umgebung von x.

$n=1$



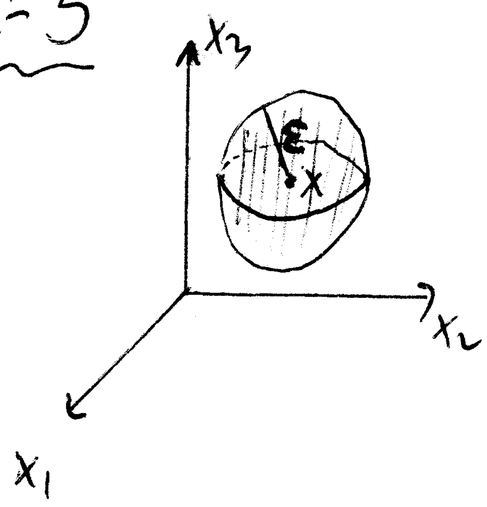
$U_\varepsilon(x)$ ist das offene Intervall mit Mittelpunkt x und Radius ε.

$n=2$



$U_\varepsilon(x)$ ist die Kreisscheibe mit Mittelpunkt x und Radius ε [Randkreis nicht drin].

$n=3$



$U_\varepsilon(x)$ ist die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius ε.

Grenzwerte von Folgen im $\mathbb{R}^n$

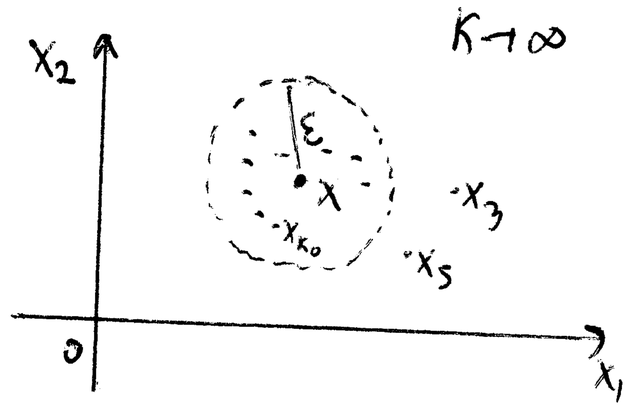
Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $x_k \in \mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$.

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Def: (x_k) konvergiert gegen x (oder $x_k \to x$ $(k\to\infty)$, oder $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$)

$:\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0\ x_k \in U_\varepsilon(x)$.



Bem: Es läßt sich leicht zeigen (s. 2.1.1c)), dass die Grenzwertbildung komponentenweise durchgeführt werden kann, d.h. es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = x_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$.

Beispiel: Sei $x_n := \left(1 - \frac{1}{n+1}, \frac{\sin(n)}{n^2+1}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $x_n \to (1,0)$ $(n\to\infty)$.

Lemma 2.1.2: Seien $(x_k), (y_k)$ konvergente Folgen im $\mathbb{R}^n$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

i) $x_k + y_k \to x+y \quad (k\to\infty)$ ii) $\lambda x_k \to \lambda x \quad (k\to\infty)$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus der obigen Bem. + Satz 2.5 (Ana I). $\square$

Def: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Die Menge D heißt

i) offen, falls $\forall x \in D\ \exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq D$.

ii) abgeschlossen, falls $\mathbb{R}^n \setminus D$ offen ist.

iii) beschränkt, falls $\exists M > 0$ mit $\|x\| \leq M \quad \forall x \in D$.

iv) kompakt, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

b) i) $\mathring{D} := \{x \in D \mid \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subseteq D\}$ heißt das Innere von D.

ii) $\overline{D} := \mathbb{R}^n \setminus (\overline{\mathbb{R}^n \setminus D})$ heißt der Abschluss von D.

iii) $\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$ heißt der Rand von D.

Lemma 2.1.3: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Dann

a) $U_\varepsilon(x)$ ist offen.

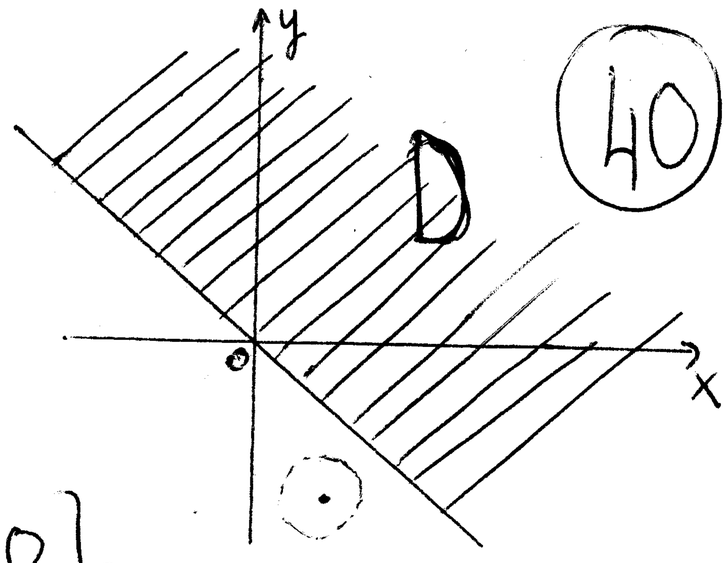
b) D ist offen $\Leftrightarrow \mathring{D} = D$. $\mathring{D}$ ist die größte offene Menge, die in D enthalten ist.

c) D ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \overline{D} = D$. $\overline{D}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die D enthält.

d) D ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_k) aus D gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x \in D$.

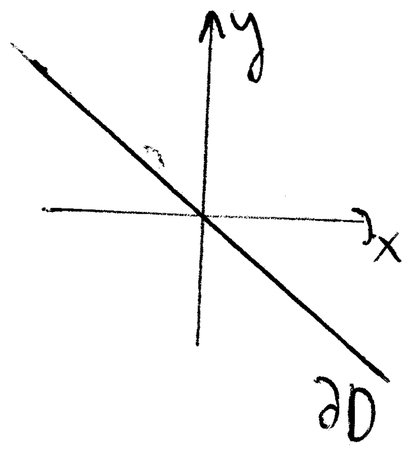
e) $x \in \overline{D} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset$.

Beweis: S. Übung. $\square$

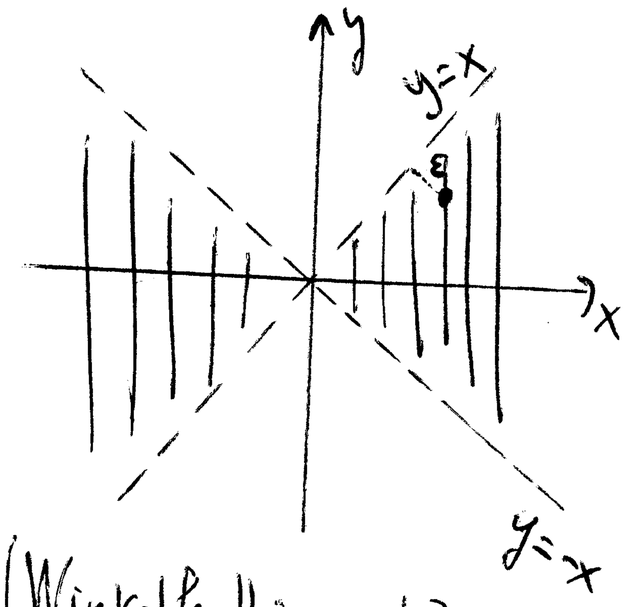


Beispiele: 1) Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 0\}$.

- D ist nicht offen $[(0,0) \in D$ und $U_\varepsilon((0,0)) \not\subseteq D \ \forall \varepsilon > 0]$.
- D ist abgeschlossen denn $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ist offen [s. Bild].
- D ist nicht beschränkt denn $(x,0) \in D \ \forall x \geq 0$.
- D ist nicht kompakt (denn nicht beschränkt).
- $\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}$.
- $\overline{D} = D$ denn D ist abgeschlossen.
- $\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D} = D \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0\}$.



2) Sei $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$.



- U ist offen: Sei $(x,y) \in U$.
  OBdA, $x, y \geq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ der Abstand von (x,y) zur Geraden $y = x$, (Winkelhalbierende).
  Dann gilt $U_\varepsilon((x,y)) \subseteq U$.
- U ist nicht abgeschlossen: Wir benutzen 2.1.3 d).
  $(\frac{1}{n+1}, 0) \in U \ \forall n \in \mathbb{N}$ aber $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{1}{n+1}, 0) = (0,0) \notin U$.
- $\mathring{U} = U$ denn U ist offen und $\overline{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 0\}$.
  Daraus folgt $\partial U = \overline{U} \setminus \mathring{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm x\}$.

Satz 2.1.4 (ohne Beweis). Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann:

K ist kompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge (x_k) aus K besitzt eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in K$ konvergiert. $\square$

2.2 Stetigkeit

Def: (Grenzwert)

Seien $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{D}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (oder $f(x) \to b$ $(x \to a)$) falls

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ sodass $\|f(x) - b\| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $0 < \|x - a\| < \delta$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ sodass $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ für alle $x \in D \cap U_\delta(a) \setminus \{a\}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ mit $f(U_\delta(a) \cap (D \setminus \{a\})) \subseteq U_\varepsilon(b)$.

Bem: Wenn existent ist der Grenzwert eindeutig bestimmt:

Aus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1$ und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_2$ folgt $b_1 = b_2$.

Mithilfe von 2.1.1c) lässt es sich leicht zeigen:

Lemma 2.2.1: Seien f, a, b wie in der obigen Definition, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ und $b = (b_1, \dots, b_m)$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f_k(x) = b_k \text{ für } k = 1, 2, \dots, m.$$

$\square$

Lemma 2.2.2: Seien $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, dann $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$.

b) Falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, dann $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda b$.

Beweis: Dies wird wie Satz 5.3 (Ana I) bewiesen. $\square$

Bem: fg ist i.A. nicht definiert (keine Multiplikation in $\mathbb{R}^m$ für $m \geq 3$)

Satz 2.3.3 (Substitution)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ und $g: E \to \mathbb{R}^p$. Sei $a \in \overline{D}$.

Ang, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ und $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ und $f(D) \subseteq E \setminus \{b\}$. [Beachte: $b \in \overline{E}$]

$\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} E \setminus \{b\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$. Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

- $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c \Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ mit $g(E \cap U_{\delta_1}(b) \setminus \{b\}) \subseteq U_\varepsilon(c)$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $f(D \cap U_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq U_{\delta_1}(b)$.

Daraus folgt $(g \circ f)(U_\delta(a) \cap D \setminus \{a\}) = g(f(U_\delta(a) \cap D \setminus \{a\}) \subseteq g(E \cap U_{\delta_1}(b) \setminus \{b\}) \subseteq U_\varepsilon(c)$. $\square$

Beispiel: $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$.

Wir betrachten
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2+y^2 \qquad z \longmapsto \frac{\sin z}{z} \end{aligned}$$
$\left[(g \circ f)(x,y) = g(x^2+y^2) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{2.1.1c)}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2) = 0$ und $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \overset{\text{Ana I}}{=} 1$.

Aus 2.2.3 folgt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$.

Satz 2.2.4 (Folgenkriterium)

Seien $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{D}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff$ für jede Folge (x_k) aus $D\setminus\{a\}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

Beweis: Dies wird wie Satz 5.5 (Ana I) bewiesen. $\square$

Beispiele: 1) Sei $f: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

- Sei $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, 0)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $(x_n, y_n) \to (0,0)$ $(n\to\infty)$ und
  $f(x_n, y_n) = \frac{(1/n^2)\cdot 0}{1/n^4 + 0} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0$.
- Sei $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to (0,0)$ $(n\to\infty)$ und
  $f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{1/n^2 \cdot 1/n^2}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} \neq 0 \overset{2.2.4}{\Rightarrow} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.

2) Sei $f: \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Es gilt $0 \leq |f(x,y)| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x| \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$\overset{\text{Sandw.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

<u>Def:</u> (Stetigkeit)

Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a \in D$.

- f heißt stetig in a falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

[$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ sodass $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $\|x-a\| < \delta$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ sodass $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$ für alle $x \in D \cap U_\delta(a)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ sodass $f(D \cap U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$.]

- f heißt stetig falls f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

<u>Lemma 2.2.5:</u> Seien f, a wie in der obigen Definition, und $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. Dann:

a) f ist stetig in $a \Leftrightarrow$ alle f_k $(k=1,\dots,m)$ stetig in a sind.

b) f ist stetig $\Leftrightarrow$ alle f_k $(k=1,\dots,m)$ stetig sind.

<u>Beweis:</u> Folgt unmittelbar aus der Def. und 2.2.1 $\square$

<u>Lemma 2.2.6:</u> Folgende Funktionen sind stetig:

a) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{Konst}} \mathbb{R}^m$, $x \longmapsto b$

b) $\text{Ad}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$

c) $\text{Mult}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$

d) Quot: $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x/y$

e) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{Koordinaten-Funktion}} \mathbb{R}$, $x=(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$

f) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$.

<u>Beweis</u>: a) Trivial. b) Sei $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$. $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} Ad(x,y) \overset{2.1.1(c)}{=} \lim\limits_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} (x+y)$

$\overset{\text{Ana I}}{=} a_1+a_2 = Ad(a_1,a_2)$.

c), d), e): Analog zu b).

f) Sei $a\in\mathbb{R}^n$ und $\varepsilon>0$ vorgegeben. Für alle $x\in\mathbb{R}^n$ gilt $\|f(x)-f(a)\|$
$= \big|\|x\|-\|a\|\big| \overset{\Delta}{\leq} \|x-a\|$. Sei $\delta:=\varepsilon$. Dann haben wir
$\|x-a\|<\delta=\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \|x-a\| < \varepsilon$. Also ist $\|\ \|$ in a stetig. $\square$

<u>Satz 2.2.7</u> (Komposition)

Seien $D\subseteq\mathbb{R}^n$, $E\subseteq\mathbb{R}^m$, $f: D\to\mathbb{R}^m$, $g: E\to\mathbb{R}^p$ mit $f(D)\subseteq E$.

$\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap\!\!\shortparallel}{E}} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$. Sei $a\in D$. Dann:

i) (f stetig in a und g stetig in $f(a)$) $\Rightarrow$ $g\circ f$ stetig in a.

ii) f,g stetig $\Rightarrow$ $g\circ f$ stetig.

<u>Beweis</u>: Dies wird wie Satz 2.2.3 bewiesen. $\square$

<u>Korollar 2.2.8</u>: Seien $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$, $a\in D$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

a) Sind f,g stetig in a, dann auch $f+g$, λf, fg, und f/g (wenn $g(a)\neq 0$).

b) Sind f,g stetig, dann auch $f+g$, λf, fg und f/g (wenn $g\neq 0$).

<u>Beweis:</u> a) Sei $D \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto (f(x), g(x))$. Nach 2.2.5 ist h stetig in a.

Nach 2.2.7 ist $f+g = Ad \circ h$ stetig in a. $\left[\begin{array}{l} D \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{Ad} \mathbb{R} \\ x \longmapsto (f(x), g(x)) \\ \qquad (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2 \end{array} \right]$

Analog für λf, fg, f/g.

b) Folgt unmittelbar aus a).

$\square$

<u>Beispiele:</u> 1) Reelle Polynome in n Variablen der Form

$$p(x) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \\ k_1 + \dots + k_n \leq r}} \underbrace{c_{k_1, \dots, k_n}}_{\in \mathbb{R}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \quad (r \in \mathbb{N})$$

sind stetige Funktionen:

[Konstanten und Koordinatenfunktionen sind stetig und wiederholte Anwendung von 2.2.8].

2) $f(x,y) := \dfrac{e^x + 4yx}{5 + \sin(2y)}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

Es reicht z.z., dass $f_1(x,y) := e^x$; $f_2(x,y) := 4yx$; $f_3(x,y) := 5$ und $f_4(x,y) := \sin(2y)$ stetig sind.

Zu f_4: f_4 ist die Komposition von den 3 folgenden stetigen Funktionen: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$.

$(x,y) \longmapsto y \qquad z \longmapsto 2z$

<u>Satz 2.2.9</u> (Folgenkriterium)

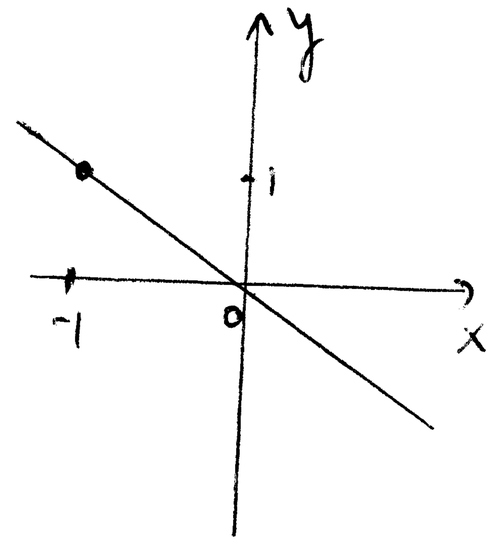
Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $a \in D$. Dann:

f ist stetig in a $\Longleftrightarrow$ für jede Folge (x_k) aus D gilt:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(a).$$

<u>Beweis:</u> Folgt unmittelbar aus dem Satz 2.2.4 $\square$

<u>Beispiele:</u> 1) Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \pi & \text{für } x+y>0 \\ 0 & \text{für } x+y \leq 0. \end{cases}$



Ist f stetig in $(-1,1)$? $f(-1,1) = 0$.

Sei $(x_n, y_n) := (-1+\frac{1}{n}, 1)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (-1,1)$ aber $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(-1+\frac{1}{n}, 1) \underset{(-1+\frac{1}{n})+1 = \frac{1}{n} > 0}{=}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \pi = \pi \neq 0 = f(-1,1)$. f ist nicht stetig in $(-1,1)$. [Satz 2.2.4]

2) Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Ist f stetig in $(0,0)$? $f(0,0) = 0$ und $0 \leq |f(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leq |y|$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$. Sandwich-Lemma $\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow$ f ist stetig in $(0,0)$.

Mithilfe vom Satz 2.1.4 und wie im Satz 5.15 (Ana I) läßt sich zeigen:

<u>Satz 2.2.10:</u> Seien $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f (auf K) ihr Maximum und Minimum an, d.h. $\exists c, d \in K$ mit $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ $\forall x \in K$. $\square$

Um zu zeigen dass gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ offen oder

abgeschlossen sind kann man manchmal den folgenden Satz benutzen:

<u>Satz 2.2.11:</u> Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann:

a) $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen $\Rightarrow f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $[f^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in U\}]$

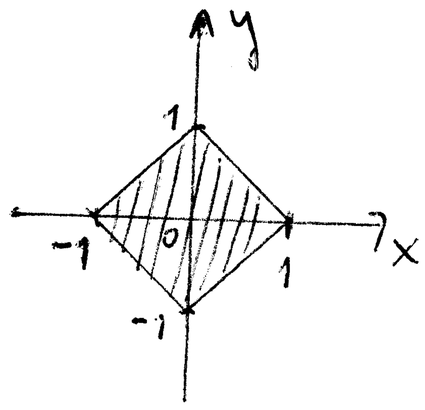
b) $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

<u>Beweis:</u> a) Sei $x \in f^{-1}(U)$. $f(x) \in U$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$.
f stetig in $x \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. Also $f(U_\delta(x)) \subseteq U$ und $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$. D.h. $f^{-1}(U)$ ist offen.

b) z.z.: $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A)$ ist offen. $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen $\Rightarrow \mathbb{R}^m \setminus A$ ist offen
$\overset{a)}{\Longrightarrow} f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus A)$ offen $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus A)$ ist offen. $\square$

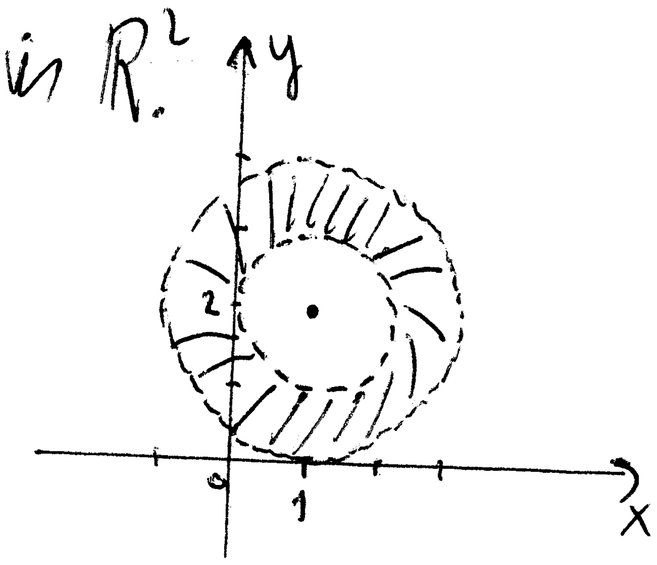
<u>Beispiele:</u>

1) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ ist abgeschlossen:



Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := |x| + |y|$.
f ist stetig (Zusammensetzung von stetigen Funktionen).
$2.2.11 \Rightarrow A = f^{-1}(\underbrace{[0,1]}_{\text{abgeschlossen in } \mathbb{R}})$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$.

2) $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < (x-1)^2 + (y-2)^2 < 4\}$ ist offen:



Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$.
f ist stetig (Polynom). $2.2.11 \Rightarrow U = f^{-1}(\overbrace{]1,4[}^{\text{offen in } \mathbb{R}})$ ist offen in $\mathbb{R}^2$.

Def: Sei $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ und $x \in D$.

a) f hat ein lokales Maximum bei x wenn $\exists \delta > 0$ mit
$f(y) \leq f(x) \ \forall y \in U_\delta(x) \cap D$.

b) f hat ein globales Maximum bei x wenn $f(y) \leq f(x) \ \forall y \in D$.

c) Analog für lokales und globales Minimum.

d) f hat ein lokales Extremum bei x wenn f ein lokales Maximum oder Minimum bei x hat.

e) Analog für globales Extremum.

Beispiel: Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2x + 3 + y^2$.

$$f(x,y) = (x+1)^2 + 2 + y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

quadrat. Ergänz.

- $f(-1,0) = 2 \Rightarrow (-1,0)$ ist ein globales Minimum von f.
- f hat kein globales Maximum denn $f(x,0) = (x+1)^2 + 2 \to \infty \ (x \to \infty)$.
- Es lässt sich leicht zeigen, dass $(-1,0)$ das einzige lokales Extremum von f ist.

Bem: Für eine gegebene Funktion $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ kann man meistens nicht raten, ob f lokale Extrema besitzt. Dazu braucht man im Allgemeinen die sogenannten partiellen Ableitungen.