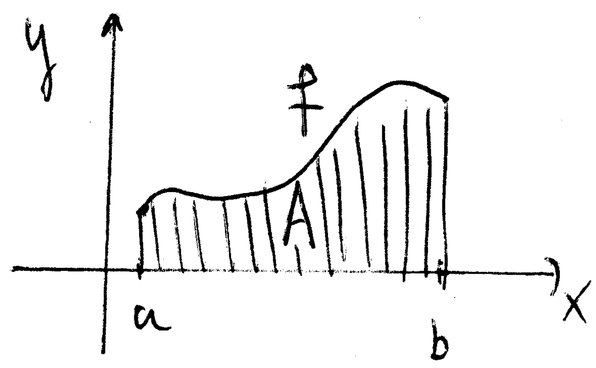
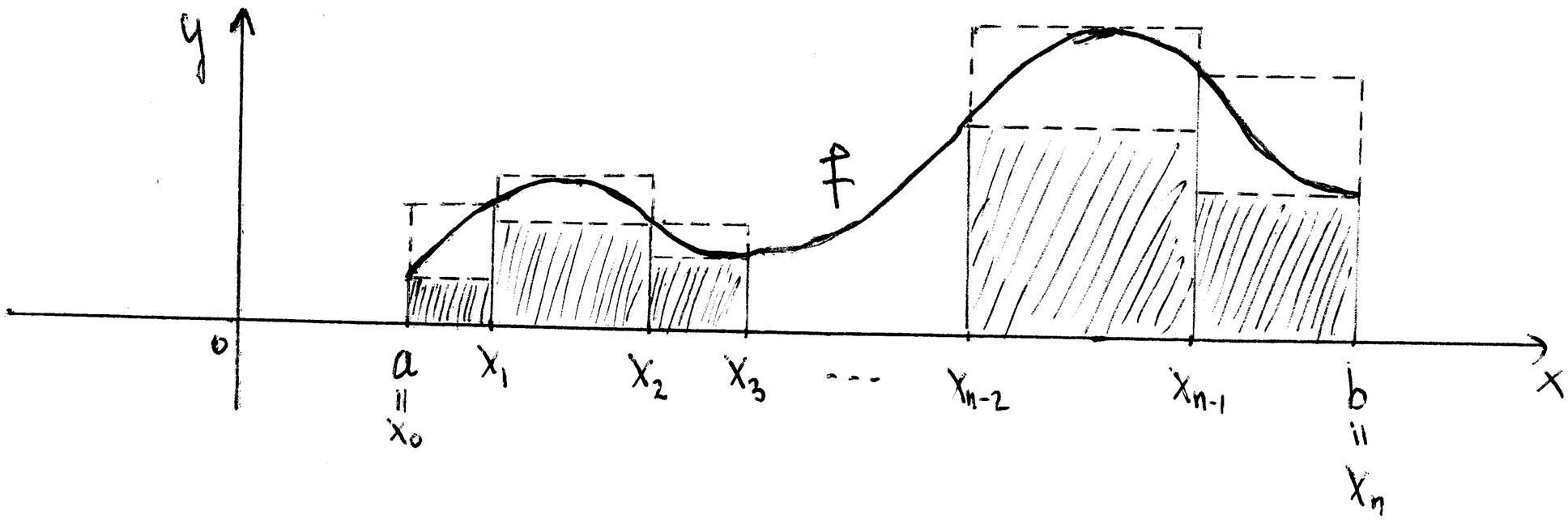
1. Integralrechnung

Ziel: Ein geeignetes Flächenmaß einzuführen.



Das Riemannsche Integral

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt (d.h. $\exists M>0$ mit $|f(x)|\leq M \ \forall x\in[a,b]$).



Seien $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

$Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt Zerlegung von $[a,b]$.

$I_k := [x_{k-1}, x_k]$ heißt das k-te Teilintervall von Z $(k=1,2,\dots,n)$.

$\|Z\| := \max\{x_k - x_{k-1} \mid 1\leq k\leq n\}$ heißt Feinheit von Z.

Seien Z_1, Z_2 zwei Zerlegungen von $[a,b]$.

Dann heißt Z_2 Verfeinerung von Z_1 falls $Z_1 \subseteq Z_2$.

Beispiel: Sei $[a,b]=[0,1]$. $Z_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\}$ ist eine Verfeinerung von $Z_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Def: Sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Dann:

$$\overline{S}(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) \quad \text{(Obersumme von } f \text{ bzgl. } Z\text{)}$$

$$\underline{S}(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in I_k} f(x) \quad \text{(Untersumme von } f \text{ bzgl. } Z\text{)}$$ [s. Bild, S. 6]

$$\left[\sup_{x \in I_k} f(x) := \sup \{ f(x) \mid x \in I_k \} \text{ und analog für inf} \right].$$

<u>Bem:</u> $\overline{S}(f,Z)$ (bzw $\underline{S}(f,Z)$) ist der Flächeninhalt der oberen (bzw unteren) Treppenfunktion (s. Bild, S. 6).

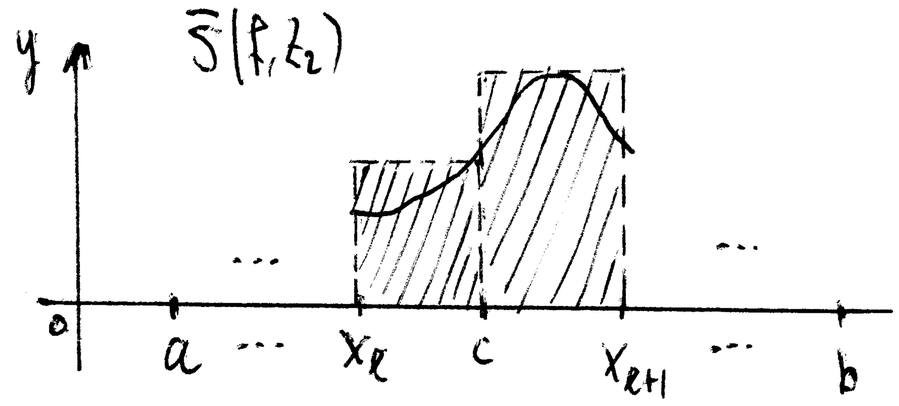
<u>Lemma 1.1:</u> Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Z_1, Z_2 Zerlegungen von $[a,b]$. Wenn $Z_1 \subseteq Z_2$ gilt:

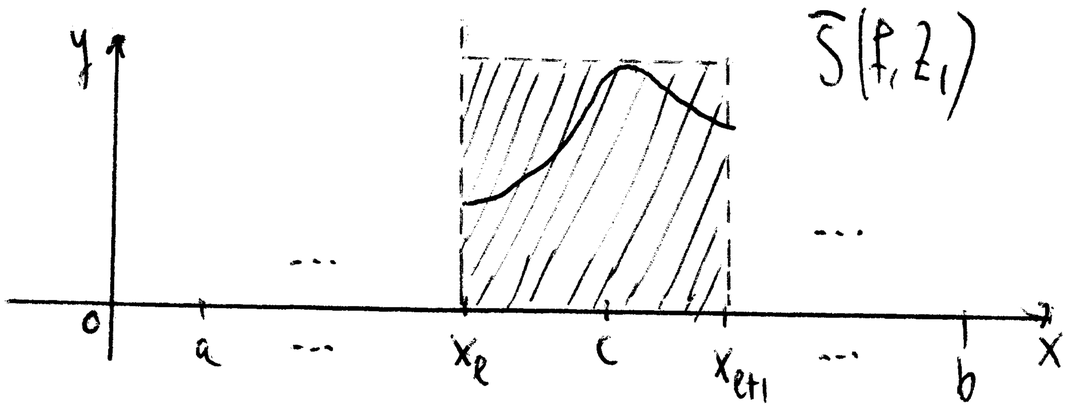
a) $\overline{S}(f,Z_1) \geq \overline{S}(f,Z_2)$ b) $\underline{S}(f,Z_1) \leq \underline{S}(f,Z_2)$.

<u>Beweis:</u> Zu a): Sei $Z_1 = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$.

OBdA darf $|Z_2| = |Z_1| + 1$ vorausgesetzt werden. (Warum?)

Also $Z_2 = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_\ell, c, x_{\ell+1}, \dots, x_n = b\}$.





$$\overline{S}(f,Z_1) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x).$$

$$\overline{S}(f,Z_2) = \sum_{k=1}^{\ell} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) + (c - x_\ell) \sup_{x \in [x_\ell, c]} f(x) + (x_{\ell+1} - c) \sup_{x \in [c, x_{\ell+1}]} f(x) + \sum_{k=\ell+2}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x).$$

$$\bar{S}(f,Z_1)-\bar{S}(f,Z_2) = \underbrace{(x_{\ell+1}-x_\ell)}_{x_{\ell+1}-c+c-x_\ell}\sup_{x\in[x_\ell,x_{\ell+1}]} f(x) - (c-x_\ell)\sup_{x\in[x_\ell,c]} f(x) - (x_{\ell+1}-c)\sup_{x\in[c,x_{\ell+1}]} f(x)$$

$$= (x_{\ell+1}-c)\underbrace{\left(\sup_{x\in[x_\ell,x_{\ell+1}]} f(x) - \sup_{x\in[c,x_{\ell+1}]} f(x)\right)}_{\geq 0 \text{ denn } [c,x_{\ell+1}]\subseteq[x_\ell,x_{\ell+1}]} + (c-x_\ell)\underbrace{\left(\sup_{x\in[x_\ell,x_{\ell+1}]} f(x) - \sup_{x\in[x_\ell,c]} f(x)\right)}_{\geq 0 \text{ denn } [x_\ell,c]\subseteq[x_\ell,x_{\ell+1}]} \geq 0$$

$$\Rightarrow \bar{S}(f,Z_1)-\bar{S}(f,Z_2)\geq 0 \Rightarrow \bar{S}(f,Z_1)\geq \bar{S}(f,Z_2).$$

$\square$

<u>Konsequenzen:</u>

i) Für zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,b]$ gilt stets (nach Lemma 1.1)

$$\underline{S}(f,Z_1) \underset{1.1}{\leq} \underline{S}(f,Z_1\cup Z_2) \underset{\text{trivial}}{\leq} \bar{S}(f,Z_1\cup Z_2) \underset{1.1}{\leq} \bar{S}(f,Z_2), \text{ also}$$

$\underline{S}(f,Z_1)\leq \bar{S}(f,Z_2)$ $\forall Z_1,Z_2$ Zerlegungen von $[a,b]$.

ii) Nach i) existieren

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{Z \text{ Zerleg. von } [a,b]} \bar{S}(f,Z) \quad \text{(Oberintegral von } f \text{ über } [a,b])$$

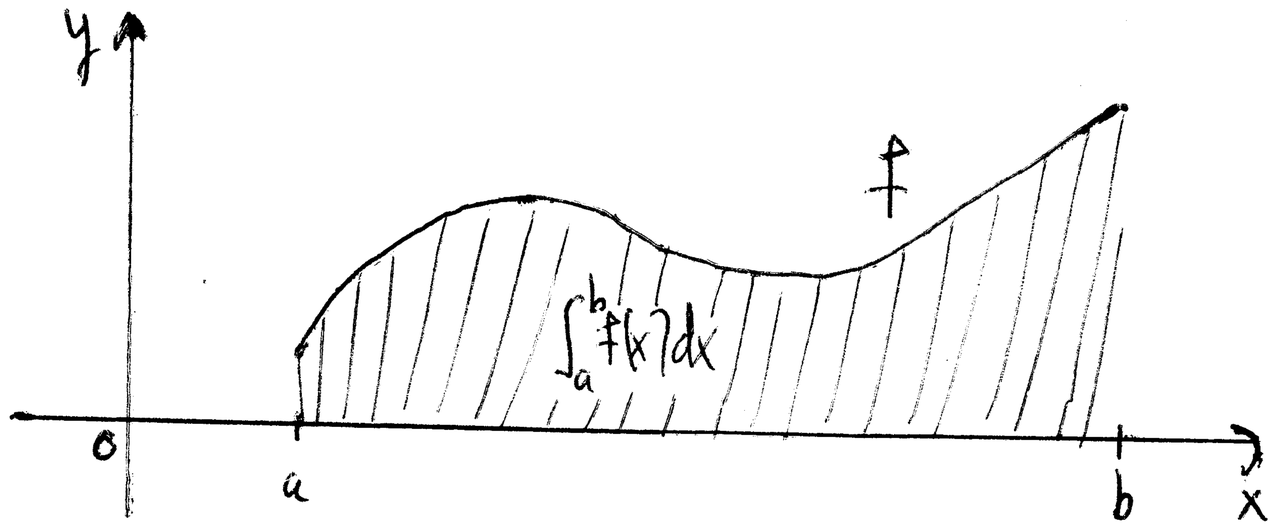
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_{Z \text{ Zerleg. von } [a,b]} \underline{S}(f,Z) \quad \text{(Unterintegral von } f \text{ über } [a,b])$$

und es gilt stets $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)$.

<u>Def:</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt.

Gilt $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, so heißt f (Riemann-)integrierbar über $[a,b]$ und es wird definiert $\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \left(= \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right)$.

Bem: $\int_a^b f(x)dx$ ist ein Maß für den Flächeninhalt der Punktmenge zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich des Intervalls $[a,b]$, wenn $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$.



Lemma 1.2 (ohne Beweis)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} \|Z_n\| = 0$. Dann gilt

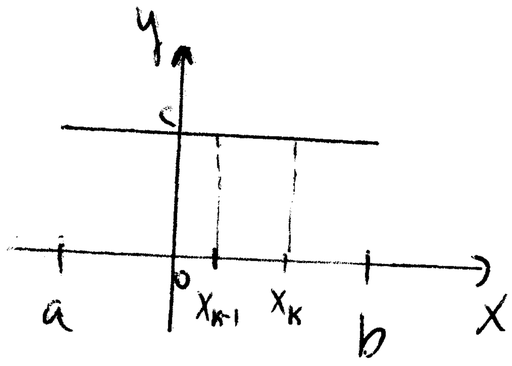
$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, Z_n) = \underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, Z_n) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

D

Also muss zur Berechnung von Ober- und Unterintegralen nicht die Gesamtheit aller Zerlegungen betrachtet werden.

$$\left[\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{Z \text{ Zerleg. von } [a,b]} \overline{S}(f, Z) \right]$$

Beispiele: 1) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \ \forall x \in [a,b]$.



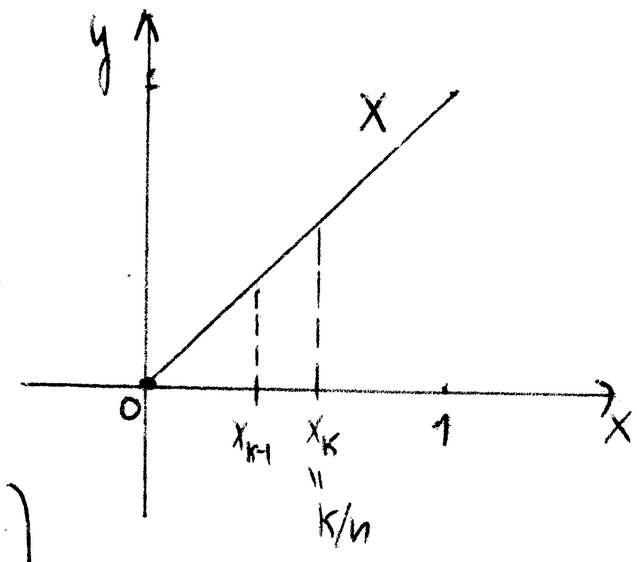
Sei Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$.

$$\overline{S}(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c = c \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = c(b-a) \Rightarrow$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{Z \text{ Zerleg. von } [a,b]} \overline{S}(f, Z) = c(b-a). \quad \text{Analog } \underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a).$$

Also ist f integrierbar über $[a,b]$ und $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

2) Wir zeigen $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.



Für $n \in \mathbb{N}^*$ betrachte man die Zerlegung

$Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. $\left[x_k = \frac{k}{n}\ \forall k \leq n,\ \|Z_n\| = \frac{1}{n}\right]$

Dann ist $\overline{S}(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} =$

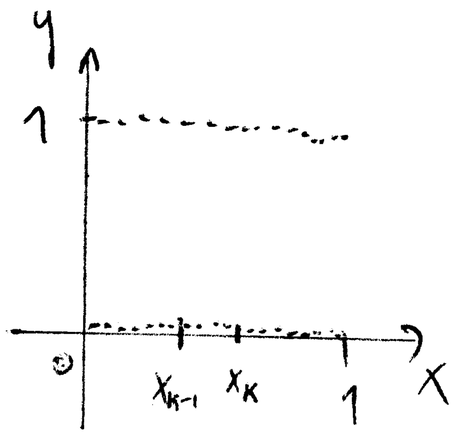
$\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ und $\underline{S}(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$.

Also $\int_0^1 x\,dx \overset{1.2}{=} \lim_{n\to\infty} \overline{S}(x, Z_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$ und $\int_0^1 x\,dx \overset{1.2}{=} \lim_{n\to\infty} \underline{S}(x, Z_n)$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$. Daher ist die Funktion x integrierbar über $[0,1]$ und es gilt $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

3) Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Sei $Z = \{0, x_1, x_2, \dots, x_n = 1\}$ eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$.

Da jedes Intervall I aus $\mathbb{R}$ (mit $|I| \geq 2$) sowohl rationale als auch irrationale Punkte enthält folgt

$$\overline{S}(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot 1 = 1 \text{ und}$$

$$\underline{S}(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in I_k} f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot 0 = 0.$$ Daraus folgt

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf_{Z \text{ Zerleg. von } [0,1]} \overline{S}(f,Z) = 1 \text{ und } \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup_{Z \text{ Zerleg. von } [0,1]} \underline{S}(f,Z) = 0.$$

$0 \neq 1 \Rightarrow f$ ist nicht integrierbar über $[0,1]$.

<u>Satz 1.3:</u> Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann:

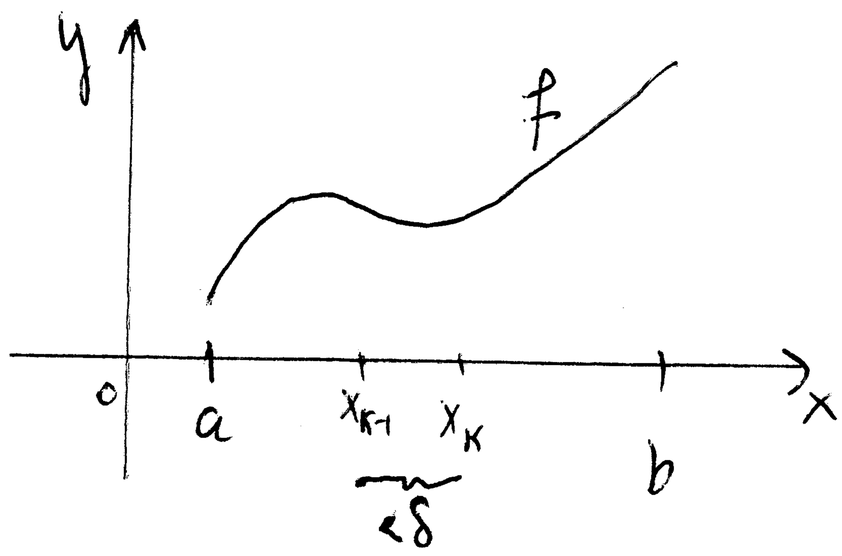
a) f stetig $\Rightarrow f$ integrierbar.

b) f monoton $\Rightarrow f$ integrierbar.

<u>Beweis:</u> Zu a): Wir zeigen $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ ($\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow f$ integrierbar über $[a,b]$).

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. f stetig $\overset{\text{Satz 0}}{\Longrightarrow} f$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ sodass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/_{b-a}$ für alle $x, x' \in [a,b]$ mit $|x - x'| < \delta$.

Sei Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \delta$.



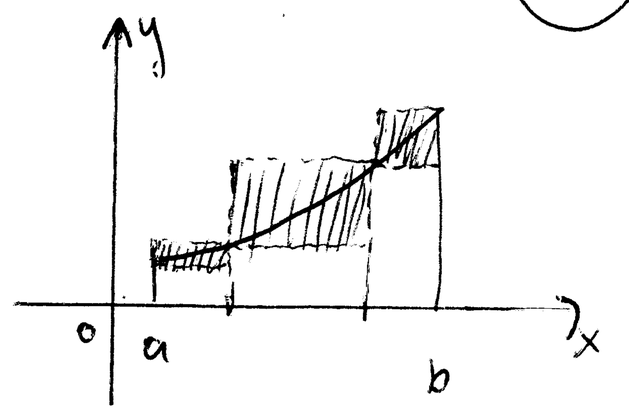
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) - \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in I_k} f(x).$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \underbrace{\left(\sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \right)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ denn } x_k - x_{k-1} < \delta} \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Zu b): OBdA können wir f monoton steigend und $f(b) > f(a)$ voraussetzen.

Wie in a) zeigen wir $\int_a^b f(x)dx - \int_{\bar{a}}^b f(x)dx \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.



Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ mit $\|Z\| < \varepsilon / f(b)-f(a)$.

$$\int_a^b f(x)dx - \int_{\bar{a}}^b f(x)dx \leq \bar{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x) - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in I_k} f(x)$$

$$\underset{f \text{ mon.}}{=} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_k) - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

$\square$

Satz 1.4: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $c \in \mathbb{R}$. Dann:

i) $f+g$ ist integrierbar und es gilt $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

ii) cf ist integrierbar und es gilt $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

iii) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

iv) fg ist integrierbar.

v) $1/f$ ist integrierbar wenn $\exists m > 0$ mit $|f(x)| \geq m \quad \forall x \in [a,b]$.

vi) $|f|$ ist integrierbar und es gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \overset{\Delta}{\leq} \int_a^b |f(x)|dx$.

Beweis: i), ii), iii), v), vi) folgen leicht aus der Definition des Integrals. i) + ii) $\Rightarrow f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist linear und iii) $\Rightarrow$

$f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist monoton.

Zu iv): Da $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right)$ reicht es z.z., dass h integrierbar $\Rightarrow h^2$ integrierbar.

$\square$

<u>Satz 1.5:</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und $c\in[a,b]$. Dann:
f ist integrierbar über $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f ist integrierbar über $[a,c]$ und $[c,b]$.
In diesem Fall gilt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

<u>Beweis:</u> Folgt leicht aus der Def. des Integrals.

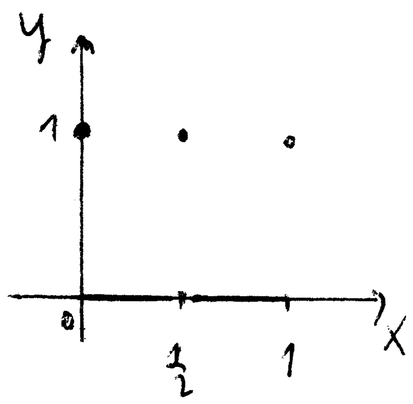
$\square$

<u>Satz 1.6:</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar.
Sei $f_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f_1(x)\neq f(x)$ für nur endlich viele $x\in[a,b]$.
Dann existiert $\int_a^b f_1(x)dx$ und es gilt $\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

<u>Beweis:</u> Folgt leicht aus der Def. des Integrals.

$\square$

<u>Beispiel:</u> Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=0\ \forall x\in[0,1]$.

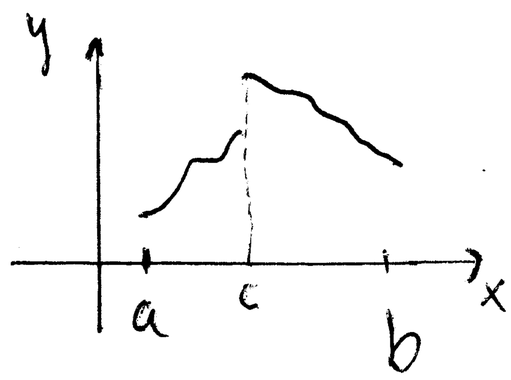


Sei $f_1:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=\begin{cases}1 & \text{für } x\in\{0,\frac{1}{2},1\}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$

Nach 1.6 gilt $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$.

Aus 1.3a), 1.5, 1.6 folgt unmittelbar:

<u>Korollar 1.7:</u> Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stückweise stetig.
Dann ist f integrierbar über $[a,b]$.



$\square$

Satz 1.8: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Dann

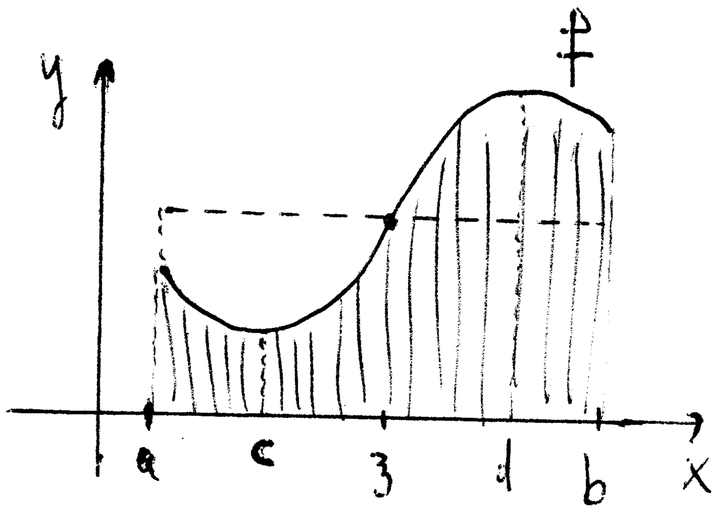
a) $(b-a)\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

b) Ist f stetig, so existiert ein $\xi\in[a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$.
[MWS der Integralrechnung].

Beweis: a) Folgt aus $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $\forall x\in[a,b]$ und Satz 1.4iii).

b) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\overset{\text{Satz 5.15, Ana I}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, c,d\in[a,b]$ mit $f(c)\leq f(x)\leq f(d)$ $\forall x\in[a,b]$. Aus a) folgt $(b-a)f(c)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq(b-a)f(d)$, also

$$f(c)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq f(d).$$



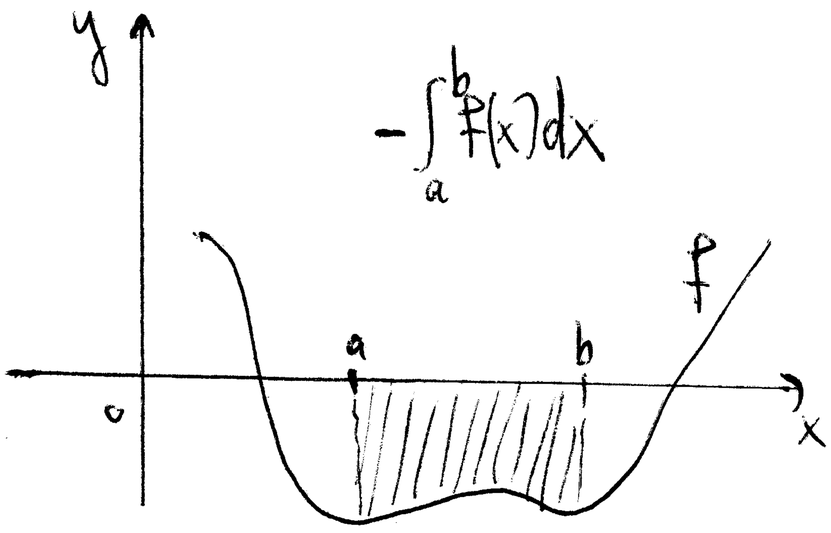
f stetig $\overset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow}$ $\exists\,\xi\in[a,b]$ mit

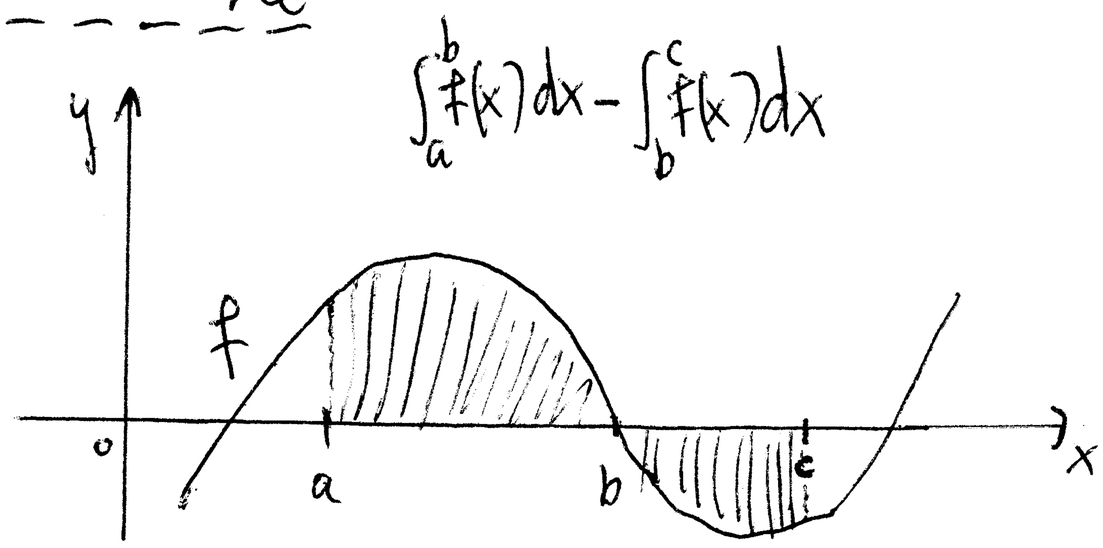
$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$. Also $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$.

$\square$

Def: Falls $a>b$ wird definiert $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$, falls das Integral rechts existiert.

Flächeninhalt der schraffierten Fläche



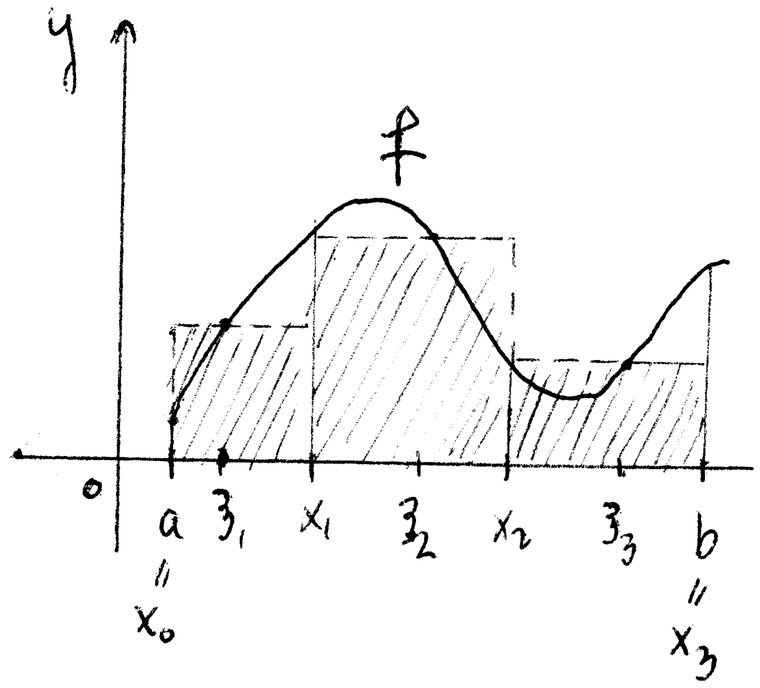


Riemannsche Summen

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $Z=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und ξ_k ein Punkt aus dem Intervall $[x_{k-1},x_k]$ für $1\leq k\leq n$.

Sei $\bar{\xi}:=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$. Dann heißt

$S(f,Z,\bar{\xi}):=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ Riemannsche Summe von f bezügl. $(Z,\bar{\xi})$.



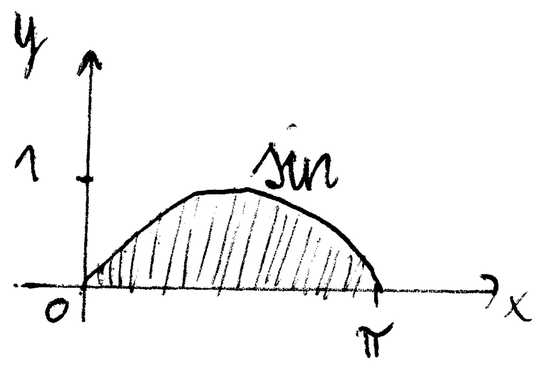
Satz 1.9: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar.
Sei $(Z_n,\bar{\xi}_n)$ sodass $\lim_{n\to\infty}\|Z_n\|=0$.
Dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} S(f,Z_n,\bar{\xi}_n)$.

Beweis: Es gilt $\underline{S}(f,Z_n)\leq S(f,Z_n,\bar{\xi}_n)\leq \overline{S}(f,Z_n)\ \forall n\in\mathbb{N}$ [s. obenstehende Skizze]

f integrierbar $\overset{\text{Lemma 1.2}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,Z_n)=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,Z_n)=\int_a^b f(x)\,dx$.

Aus dem Sandwich-Lemma folgt $\lim_{n\to\infty} S(f,Z_n,\bar{\xi}_n)=\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Beispiel (s. Üb)



Sei $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

Sei $Z_n=\{0,\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\dots,\frac{(n-1)\pi}{n},\pi\}$ und $\bar{\xi}_n=(\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\dots,\frac{(n-1)\pi}{n},\pi)$.

Dann gilt $\int_0^\pi \sin x\,dx \overset{1.9}{=} \lim_{n\to\infty} S(f,Z_n,\bar{\xi}_n)=2$.

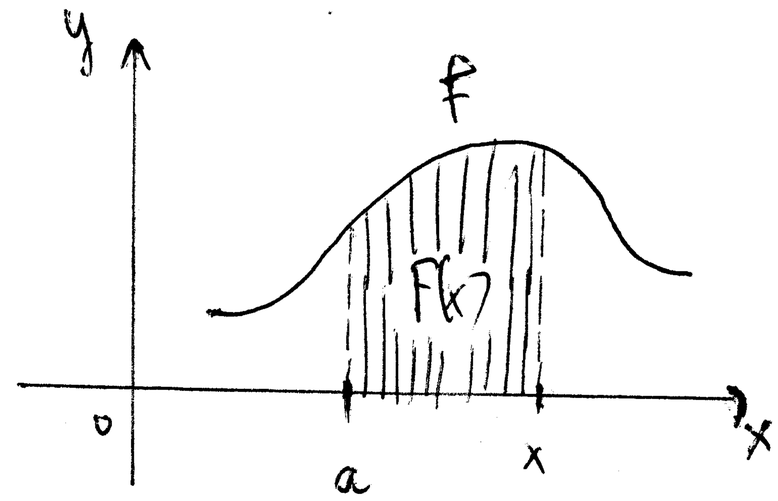
Satz 1.10 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig (I Intervall) und a ein fester Punkt aus I.

Sei $F: I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in I$. Dann ist F diff.

auf I und es gilt $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

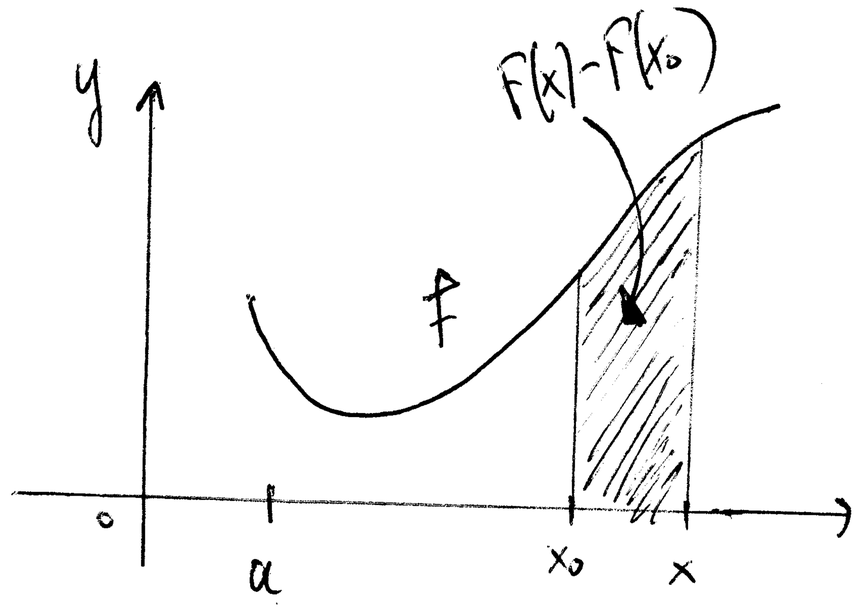


Beweis: Sei $x_0 \in I$.

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right)$$

$$\overset{1.5}{=} \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt \overset{\text{MWS, 1.8}}{=} \frac{1}{x-x_0}(x-x_0)\,f(\xi_x)$$

$= f(\xi_x)$ für ein ξ_x zwischen x_0 und x.



Daraus folgt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} f(\xi_x) = f(x_0)$.

f stetig in x_0 und $\xi_x \to x_0$ für $x \to x_0$.

Also ist F diff. in x_0 und $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Def (Stammfunktion)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ gegeben [$D \subseteq \mathbb{R}$ offen oder endliche Vereinigung von Intervallen mit ≥ 2 Punkten]

$F: D \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f wenn gilt:

F ist diff. auf D und $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$.

Bem: Nach dem Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung (1.10) besitzt jede stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion.

Satz 1.11: $I \subseteq \mathbb{R}$ bezeichne ein Intervall.

a) Sei F eine Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.
Dann ist auch $F+c$ Stammfunktion von f.

b) Seien F_1, F_2 Stammfunktionen von $f: I \to \mathbb{R}$.
Dann ist $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion (d.h. $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $F_1(x) - F_2(x) = c \ \forall x \in I$).

Beweis: a) $(F+c)' = F' + c' = F' + 0 = f$.

b) $(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ \forall x \in I \overset{\text{Korall. 7.8, Ana I}}{\Longrightarrow} \exists c \in \mathbb{R}$ mit $F_1(x) - F_2(x) = c \ \forall x \in I$.

$\square$

Def: Gegeben sei $f: I \to \mathbb{R}$.
Dann bezeichnet $\int f(x)dx$ die Menge aller Stammfunktionen von f. $\int f(x)dx$ heißt unbestimmtes Integral von f.
Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von f, so schreibt man

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Die Begründung für diese Schreibweise ist durch Satz 1.11 gegeben.

Beispiele: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$;

$\int e^x dx = e^x + c$; $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$; $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$;

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$; $\int f(x) dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(ax+b) dx \overset{a \neq 0}{=} \frac{1}{a} F(ax+b) + c.$

lineare Substitution

Ist F_i Stammfunktion von f_i $(i=1,2)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$ und $\int \lambda f_1(x) dx = \lambda \int f_1(x) dx.$

Satz 1.12: Sei F eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ (auch mit $F(x)\big|_a^b$ oder $[F(x)]_a^b$ bezeichnet).

Beweis: Nach dem Hauptsatz der Diff- und Integralrechnung (1.10) ist $G(x) := \int_a^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f. Nach 1.11b) gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = G(x) + c \ \forall x \in [a,b]$. Daraus folgt

$$F(b) - F(a) = G(b) + c - (G(a) + c) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx - \underbrace{\int_a^a f(x) dx}_{0} = \int_a^b f(x) dx. \qquad \square$$

Beispiele: i) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$

ii) $\int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2.$

iii) $\int_0^\pi \sin(2x) dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) \Big|_0^\pi = -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$

Def: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ [D offen oder endliche Vereinigung von Intervallen mit ≥ 2 Punkten]

f heißt stetig differenzierbar wenn f diff und f' stetig ist.

Satz 1.13 (partielle Integration)

Seien $u, v: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann:

a) $\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$ (unbestimmtes Integral)

b) $\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Beweis: Die Produktregel für Ableitungen (Satz 7.2, Ana I) liefert $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Daraus folgt:

a) $\int (u(x)v(x))'\,dx = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx \Rightarrow$

$u(x)v(x) + c = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx \Rightarrow$

$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) + c - \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx.$

b) $\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx \overset{1.12+1.4}{\Longrightarrow}$

$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx \Rightarrow$

$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$ $\square$

Beispiele:

1) $\int x \sin x \, dx$ und $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

- $\int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin x}_{u'} dx \overset{P.I}{=} (-\cos x)x - \int -\cos x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx =$

$$-x\cos x + \sin x + c.$$

- $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx \overset{1.12}{=} (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = -\pi \underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\sin\pi}_{0} + 0 - 0 = \pi.$

Bem: Man könnte auch versuchen, das obige Integral $\int x \sin x \, dx$ mit $u' = x$ und $v = \sin x$ zu berechnen:

$$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v} dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \underbrace{\int \frac{1}{2}x^2 \cos x \, dx}_{\text{Komplizierter als } \int x \sin x dx}.$$

$u' = x$, $v = \sin x$ führt nicht zum Ziel.

2) $\int x^2 e^{2x} dx$.

$$\int \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{e^{2x}}_{u'} dx \overset{P.I.}{=} \frac{1}{2}e^{2x} x^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x} 2x \, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{e^{2x}}_{u'} dx \overset{P.I}{=}$$

$$\frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2}e^{2x} x - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx\right) = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2} = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + c.$$

Bem: Die Integrationskonstante c wird oft erst am Schluss hinzugefügt.

3) $\int x^7 \ln(2x) dx$.

$$\int \underbrace{x^7}_{u'} \underbrace{\ln(2x)}_{v} dx \overset{P.I.}{=} \frac{x^8}{8}\ln(2x) - \int \frac{x^8}{8} \cdot \frac{1}{2x} 2 \, dx = \frac{1}{8}x^8 \ln(2x) - \frac{1}{8}\int x^7 dx =$$

$$\frac{1}{8}x^8 \ln(2x) - \frac{1}{64}x^8 = \frac{1}{8}x^8\left(\ln(2x) - \frac{1}{8}\right) + c.$$

4) $\int e^x \sin x\,dx$

$$\int \underbrace{e^x}_{u'}\underbrace{\sin x}_{v}\,dx \overset{P.I.}{=} e^x\sin x - \int \underbrace{e^x}_{u'}\underbrace{\cos x}_{v}\,dx \overset{P.I.}{=} e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right)$$

$$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x\sin x\,dx$$

$\Rightarrow \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x-\cos x) - \int e^x\sin x\,dx$. Daraus folgt

$2\int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x-\cos x)$ und $\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

Bem: Für die zweite P.I. im obigen Beispiel wäre die Wahl $u'=\cos x$, $v=e^x$ ungünstig gewesen:

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{\cos x}_{u'}\,dx \overset{P.I}{=} e^x\sin x - \left(e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx\right)$$

$= e^x\sin x - e^x\sin x + \int e^x\sin x\,dx = \int e^x\sin x\,dx$. Wir drehen uns im Kreis!

5) $\int \sin^2 x\,dx$ und $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$.

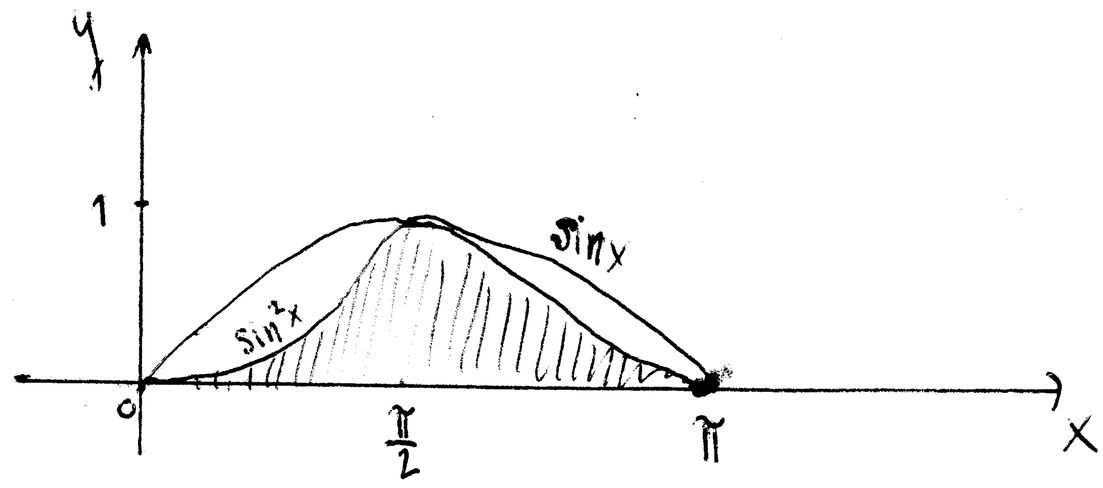
- $\int \sin^2 x\,dx = \int \underbrace{\sin x}_{u'}\cdot\underbrace{\sin x}_{v}\,dx \overset{P.I}{=} -\cos x\sin x - \int(-\cos x)\cos x\,dx =$

$-\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx \overset{Trick}{=} -\sin x\cos x + \int(1-\sin^2 x)\,dx =$

$-\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx \Rightarrow \int \sin^2 x\,dx = x - \sin x\cos x - \int \sin^2 x\,dx$.

Daraus folgt $2\int \sin^2 x\,dx = x - \sin x\cdot\cos x \Rightarrow \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x-\sin x\cdot\cos x)+C$.

- $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx \overset{1.12}{=} \frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)\Big|_0^\pi = \frac{1}{2}(\pi-0-0+0) = \pi/2$.



Satz 1.14 (Substitutionsregel)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig diff und $g: I\to\mathbb{R}$ stetig mit $f([a,b])\subseteq I$.

Dann ist $g\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definiert: $[a,b]\xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$

$t \longmapsto g(t)$

Dann gilt:

a) $\boxed{\int g(t)\,dt = \int g(f(x))f'(x)\,dx}$ (unbestimmtes Integral).

Substitution: $t=f(x)$

$\frac{dt}{dx}=f'(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$

Diese Gleichung ist so zu verstehen, dass in der Stammfunktion auf der linken Seite die Unbestimmte t durch $f(x)$ zu ersetzen ist.

b) $\boxed{\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt = \int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx}$ (bestimmtes Integral).

Substitution: $t=f(x)$ Für $x=a$ ist $t=f(a)$

$dt=f'(x)dx$ Für $x=b$ ist $t=f(b)$.

Beweis: Sei G eine Stammfunktion von g, also $G'(t)=g(t)\ \forall t\in I$.
[Siehe Bem. auf der Seite 17]

a) $\int g(f(x))f'(x)\,dx \overset{G'=g}{=} \int G'(f(x))f'(x)\,dx \overset{\text{Kettenregel}}{=} \int (G\circ f)'(x)\,dx = (G\circ f)(x)+c$

$= G(f(x))+c \underset{t=f(x)}{=} G(t)+c \underset{G'=g}{=} \int g(t)\,dt.$

b) $\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx \underset{\substack{\text{Satz 1.12 +}\\ (G\circ f)'(x)=g(f(x))f'(x).}}{=} G(f(x))\Big|_a^b = G(f(b))-G(f(a)) \underset{\substack{\text{Satz 1.12 + } G'=g.}}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt.$

$\square$

Beispiele:

1) $\int_{t=7}^{10} t(t-3)^{25}\,dt.$

$$\int_{t=7}^{10} t(t-3)^{25}\,dt \underset{\substack{t=x+3\\ dt=1\cdot dx=dx}}{=\!=} \int_{x=4}^{7}(x+3)x^{25}\,dx = \int_{x=4}^{7}\left(x^{26}+3x^{25}\right)dx = \left(\frac{x^{27}}{27}+3\frac{x^{26}}{26}\right)\Bigg|_4^7$$

$$= \frac{7^{27}}{27}+3\cdot\frac{7^{26}}{26}-\frac{4^{27}}{27}-3\cdot\frac{4^{26}}{26}.$$

2) $\int_{t=1}^{4}\frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt.$

$$\int_{t=1}^{4}\frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt \underset{\substack{t=x^2\\ dt=2x\,dx\\ \sqrt{t}=|x|}}{=\!=} \int_{x=1}^{2}\frac{\sin(|x|)}{|x|}2x\,dx = \int_{x=1}^{2}\frac{\sin x}{x}2x\,dx = 2\int_{x=1}^{2}\sin x\,dx$$

$$= -2\cos x\Big|_1^2 = 2(\cos 1-\cos 2).$$

3) $\int 3te^{t^2+4}\,dt.$

$$\int 3te^{t^2+4}\,dt \underset{\substack{x=t^2+4\\ dx=2t\,dt}}{=\!=} \int e^x\cdot\frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}\int e^x\,dx = \frac{3}{2}e^x+c \underset{\text{resubstituieren}}{=} \frac{3}{2}e^{t^2+4}+c.$$

4) $\int \sin^3(2x)\cos(2x)\,dx.$

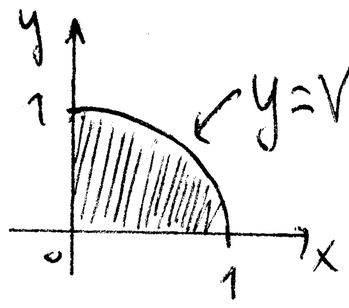
$$\int \sin^3(2x)\cos(2x)\,dx \underset{\substack{t=\sin(2x)\\ dt=2\cos(2x)\,dx}}{=\!=} \int t^3\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^3\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^4}{4}+c = \frac{t^4}{8}+c$$

$$\underset{\text{resubstituieren}}{=} \frac{1}{8}\sin^4(2x)+c.$$

5) $\int \tan(x)\,dx.$

$$\int \tan(x)\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\sin x\,dx}}{=\!=} \int\frac{-dt}{t} = -\ln(t)+c \underset{\text{resubstituieren}}{=} -\ln(\cos x)+c.$$

6) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$.



$y=\sqrt{1-x^2}$ denn $x^2+y^2=1$.

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \underset{\substack{t=\cos x\\ dt=-\sin(x)dx}}{=} \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin x)\,dx = -\int_{\pi/2}^0 \sqrt{\sin^2 x}\,\sin x\,dx = -\int_{\pi/2}^0 |\sin x|\sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4.$$

s. Beispiel 5, P.I.

7) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \underset{\substack{x=e^t\\ dx=e^t dt}}{=} \int \frac{\ln(e^t)}{e^{2t}}\,e^t\,dt = \int t e^{-t}\,dt \overset{P.I.}{=} -te^{-t}-e^{-t}+C$$

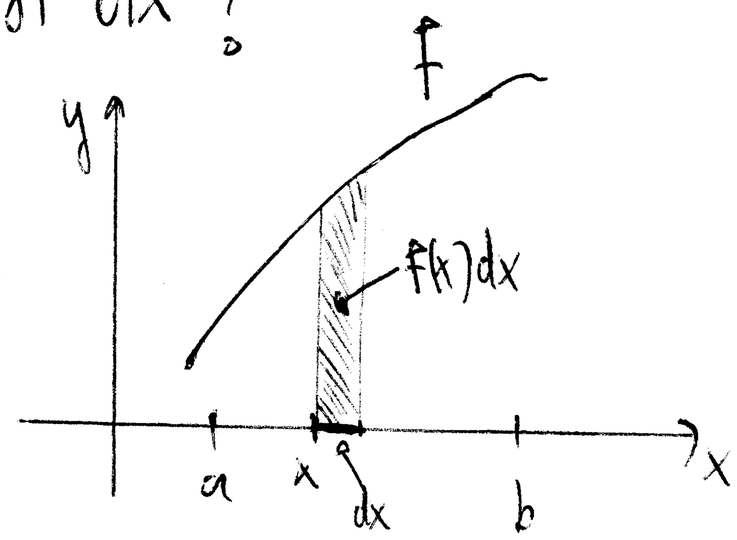
$$= -e^{-t}(t+1)+C = -\frac{1}{x}(\ln(x)+1)+C.$$

resubstituieren

Variante: P.I mit $v'=\frac{1}{x^2}$ und $v=\ln(x)$.

Frage: Was ist dx?

Geometrisch:



$\int_a^b f(x)dx$ = Summe von den $f(x)dx$ für x zwischen a und b, = Flächeninhalt.

Aber: dx einzeln betrachtet existiert überhaupt nicht: dx ist weder positiv, noch null. Wir wollen trotzdem nicht auf diese Schreibweise mit dx verzichten, denn die Substitutionsregel

$\int g(t)\,dt \underset{\substack{t=f(x),\ dt=f'(x)dx.}}{=} \int g(f(x))\,f'(x)\,dx$ ist besonders leicht anzuwenden.

Stammfunktionen von rationalen Funktionen

Def: Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ und $q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$

zwei beliebige Polynome sind $[a_i, b_j \in \mathbb{R}\ \forall i,j]$.

$\int f(x)dx$ kann (zumindest theoretisch) mit der sogenannten Methode der Partialbruchzerlegung gerechnet werden.

1°) Polynomdivision $p(x)/q(x)$ falls $\deg(p) \geq \deg(q)$ durchführen.

2°) $q(x)$ in ein Produkt von linearen und quadratischen irreduziblen Faktoren zerlegen (geht nur theoretisch wenn $\deg(q) \geq 5$).

3°) Mit dem richtigen Ansatz $p(x)/q(x)$ zerlegen und $\int f(x)dx$ berechnen (spezielle Beispiele, s. Übung).

Bem: Wenn $\deg(q) \leq 2$ führt die Methode immer zum Ziel.

Beispiele: i) $\int \frac{2x+1}{x^2+2}dx$.

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2}dx = \int \frac{2x}{x^2+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2}dx = \ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2/2}dx =$$

$$\ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(x/\sqrt{2})^2}dx \underset{\substack{t=x/\sqrt{2}\\ dt=\frac{1}{\sqrt{2}}dx}}{=} \ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\sqrt{2}\,dt = \ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+t^2}dt =$$

$$\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(t) = \ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c.$$

ii) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2-5x+6}\,dx.$

$$\frac{2x+7}{x^2-5x+6} = \frac{2x+7}{(x-2)(x-3)} \overset{\text{Ansatz}}{=} \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} =$$

$A, B \in \mathbb{R}$ zu bestimmen

$$\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)} \Leftrightarrow 2x+7 = (A+B)x-(3A+2B)$$

$$\forall x \neq 2;3 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 3A+2B=-7 \end{cases} \underset{\text{lin. Syst}}{\Leftrightarrow} A=-11,\ B=13.$$ Daraus folgt

$$\int \frac{2x+7}{x^2-5x+6}\,dx = \int\left(\frac{-11}{x-2}+\frac{13}{x-3}\right)dx = -11\ln(x-2)+13\ln(x-3)+c.$$

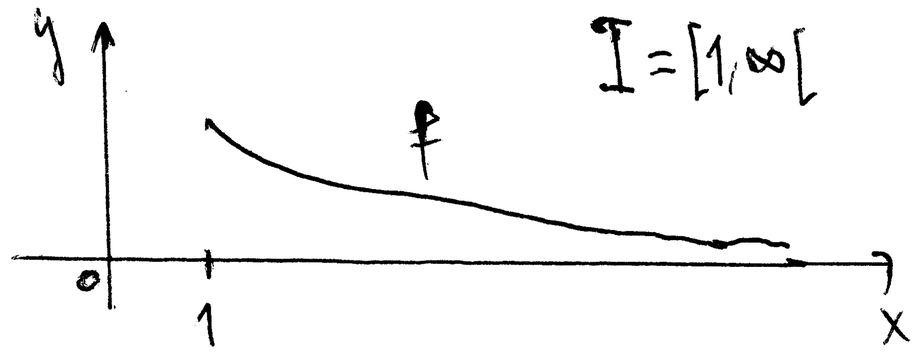
Uneigentliche Integrale

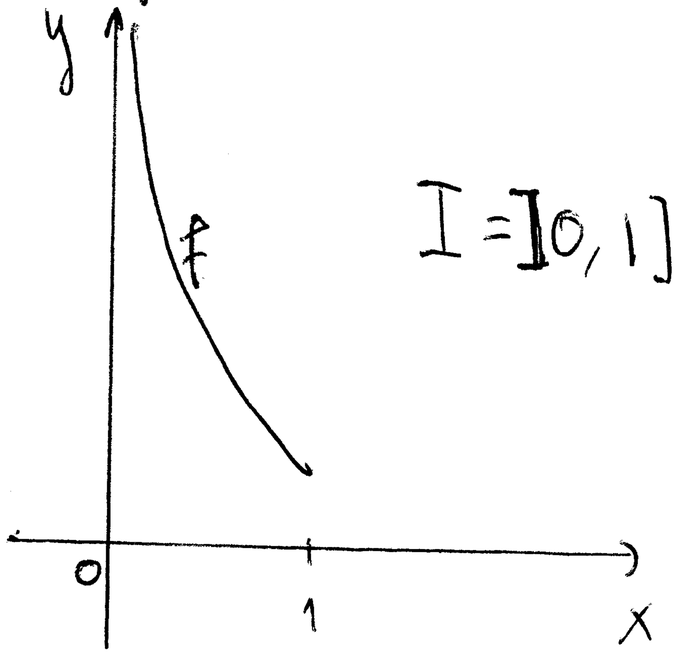
Bisher haben wir nur den Fall $\int_a^b f(x)\,dx$ betrachtet, wo $f: \underbrace{[a,b]}_{\text{Kompaktes Intervall}} \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist.

Ziel: $\int_I f(x)\,dx$ zu definieren (wenn es geht).

Typische Situationen





Definitionen:

1) • Sei $f: [a,\infty[\to \mathbb{R}$ integrierbar über $[a,R]$ $\forall R \geq a$.
Betrachte den Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$. Existiert dieser Grenzwert, so wird es mit $\int_a^\infty f(x)dx$ bezeichnet (uneigentliches Integral).

• Sei $f:]-\infty,a] \to \mathbb{R}$ integrierbar über $[R,a]$ $\forall R \leq a$.
Analog: $\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim\limits_{R\to-\infty} \int_R^a f(x)dx$ falls der Grenzwert existiert.

• Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar über $[a,b]$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.
Sei $c \in \mathbb{R}$. Falls $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ und $\int_c^\infty f(x)dx$ beide existieren, dann setzt man $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$. [Diese Def. von $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ ist unabhängig von der Auswahl von c]

2) • Sei $f: [a,b[\to \mathbb{R}$ integrierbar über $[a,t]$ $\forall t \in [a,b[$.
Betrachte $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Existiert dieser Grenzwert, so wird es mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet (uneigentliches Integral).

• Sei $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar über $[t,b]$ $\forall t \in]a,b]$.
Analog: $\int_a^b f(x)dx := \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ falls der Grenzwert existiert.

• Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ integrierbar über $[\tilde{a},\tilde{b}]$ $\forall \tilde{a},\tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit $a < \tilde{a} < \tilde{b} < b$.
Sei $c \in]a,b[$. Falls $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ beide existieren, dann setzt man $\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. [Def. unabhängig von der Auswahl von c]

Def: • Das Integral $\int_I f(x)dx$ heißt konvergent (oder konvergiert) falls $\int_I f(x)dx$ existiert.

• Das Integral $\int_I f(x)dx$ heißt divergent (oder divergiert) falls $\int_I f(x)dx$ nicht existiert.

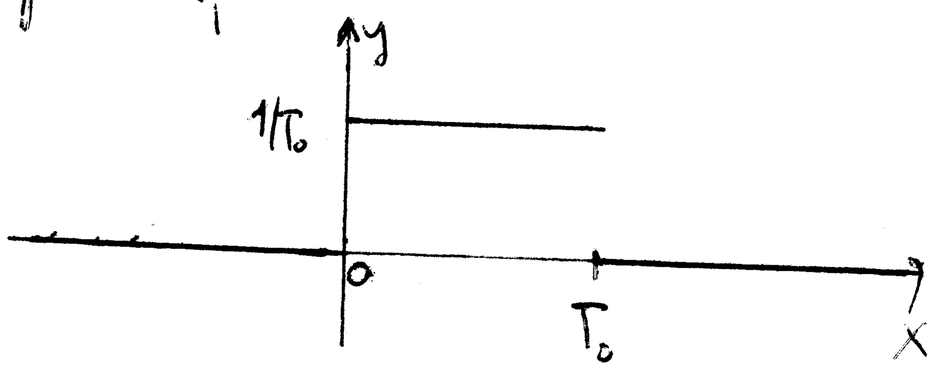
Beispiele: 1) Sei $s \in \mathbb{R}$. $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ konvergiert $\Leftrightarrow s>1$.

i) $s>1$. $\int_1^R \frac{1}{x^s}dx = \int_1^R x^{-s}dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_1^R = \frac{R^{1-s}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{R^{s-1}} \xrightarrow[(s-1>0)]{}$
$\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1}\cdot 0 = \frac{1}{s-1}$ $(R\to\infty)$. Also konvergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1}$.

ii) $s=1$. $\int_1^R \frac{1}{x}dx = (\ln x)\Big|_1^R = \ln(R) - \ln(1) = \ln(R) \to \infty$ $(R\to\infty)$.
Also divergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$.

iii) $s<1$. $\frac{1}{x^s} \geq \frac{1}{x}$ $\forall x \geq 1 \Rightarrow \int_1^R \frac{1}{x^s}dx \geq \int_1^R \frac{1}{x}dx = \ln(R)$ $\forall R \geq 1$.
Daraus folgt $\int_1^R \frac{1}{x^s}dx \to \infty$ $(R\to\infty)$. Also divergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$.

2) Sei $T_0>0$ und $f(x) = \begin{cases} 1/T_0 & \text{für } 0 \leq x \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$



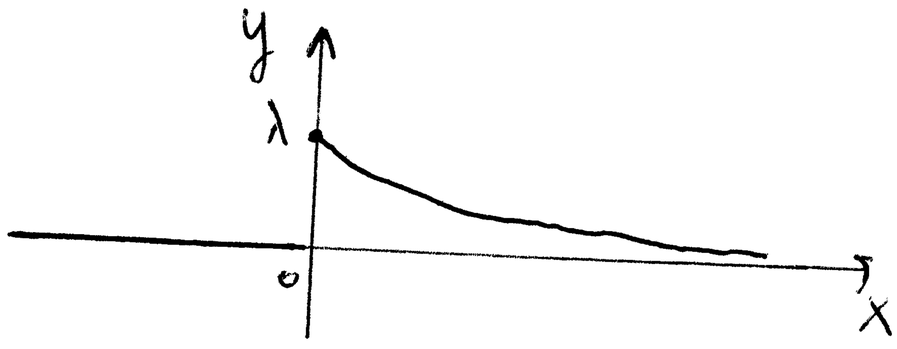
Konvergenz $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$? Wir wählen $c=0$ in der Def. von $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$.

• Sei $R>T_0$. $\int_0^R f(x)dx = \int_0^{T_0} f(x)dx + \int_{T_0}^R f(x)dx = \int_0^{T_0} \frac{1}{T_0}dx + \int_{T_0}^R 0\,dx = \frac{1}{T_0}T_0 + 0 = 1$.
Also $\int_0^\infty f(x)dx$ existiert und $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx = \lim_{R\to\infty} 1 = 1$.

• Sei $R<0$. $\int_R^0 f(x)dx = \int_R^0 0\,dx = 0$. Also existiert $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ und $\int_{-\infty}^0 f(x)dx = 0$.

Daraus folgt dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$
$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1.$

3) Sei $\lambda > 0$ und $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{"} \quad x < 0. \end{cases}$



Konvergiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$?

Sei $R > 0$. $\int_0^R f(x)dx = \int_0^R \lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^R = 1 - e^{-\lambda R} \to 1 - 0 = 1 \quad (R \to \infty)$.

Also konvergiert $\int_0^{\infty} f(x)dx$ und $\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx = 1$. Wie im Beispiel 2) hat man $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$. Also konvergiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ und
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1.$

Satz 1.15 (Majoranten- und Minorantenkriterium für uneigentliche Integrale; ohne Beweis).

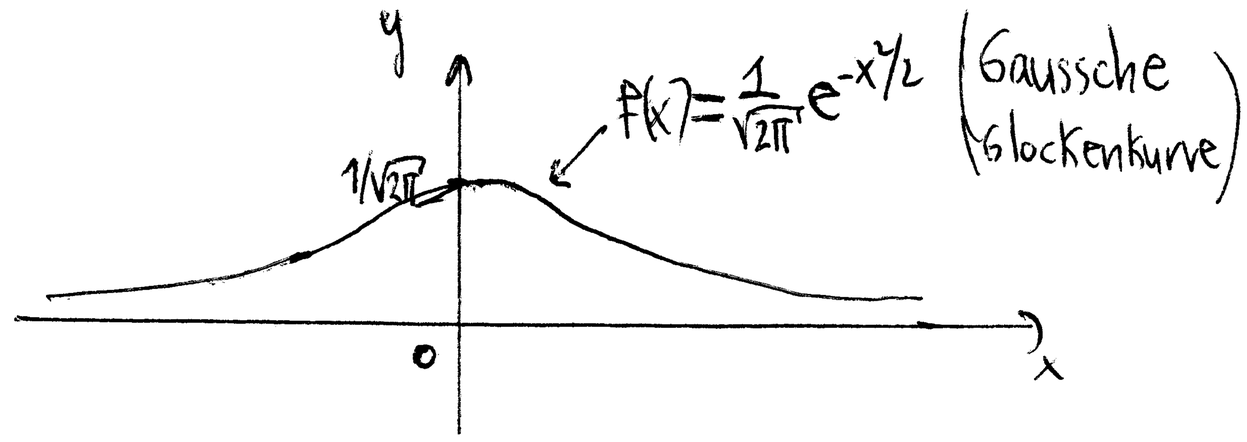
Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ integrierbar über $[a, R]$ $\forall R \geq a$. Dann:

a) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergiert falls $\exists s, K, c \in \mathbb{R}$ mit $K \geq a$ und $s > 1$ sodass $|f(x)| \leq \frac{c}{x^s}$ $\forall x \geq K$. [Major. Krit.]

b) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ divergiert falls $\exists s, K, c \in \mathbb{R}$ mit $K \geq a$ und $s \leq 1$ und $c > 0$ sodass $f(x) \geq \frac{c}{x^s}$ $\forall x \geq K$. [Minor. Krit] $\square$

Beispiele:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ konvergiert.



Da $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ eine gerade Funktion ist reicht es z.z, dass $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$ konvergiert.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \forall x>0 \Rightarrow e^x \geq x \quad \forall x>0 \Rightarrow e^{x^2/2} \geq x^2/2 \quad \forall x>0$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{e^{x^2/2}} \underset{x>0}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{x^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1.$$

Nach dem Maj. Krit (mit $s=2$, $K=1$, $c=2/\sqrt{2\pi}$) konvergiert $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$, und damit auch $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$.

Bem: Man kann zeigen, dass $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = 1$.

2) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$ konvergiert. $\left|\frac{\sin^2 x}{1+x^2}\right| = \frac{\sin^2 x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1.$

Nach dem Maj. Krit (mit $s=2$, $K=1$, $c=1$) konvergiert $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$.

3) $\int_0^\infty \frac{x^2+3}{x^3+x^2+1}dx$ divergiert. $\frac{x^2+3}{x^3+x^2+1} \geq \frac{x^2}{x^3+x^2+1} \underset{x\geq 1}{\geq} \frac{x^2}{x^3+x^3+x^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} \quad \forall x \geq 1$. Nach dem Min-Krit. (mit $s=1$, $K=1$, $c=1/3$) divergiert $\int_0^\infty \frac{x^2+3}{x^3+x^2+1}dx$.

Für das Konvergenzverhalten von Reihen hilft manchmal das folgende Kriterium:

Satz 1.16 (Integralkriterium für Reihen)

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $f: [m, \infty[\to \mathbb{R}$ monoton fallend mit $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq m$. Dann:

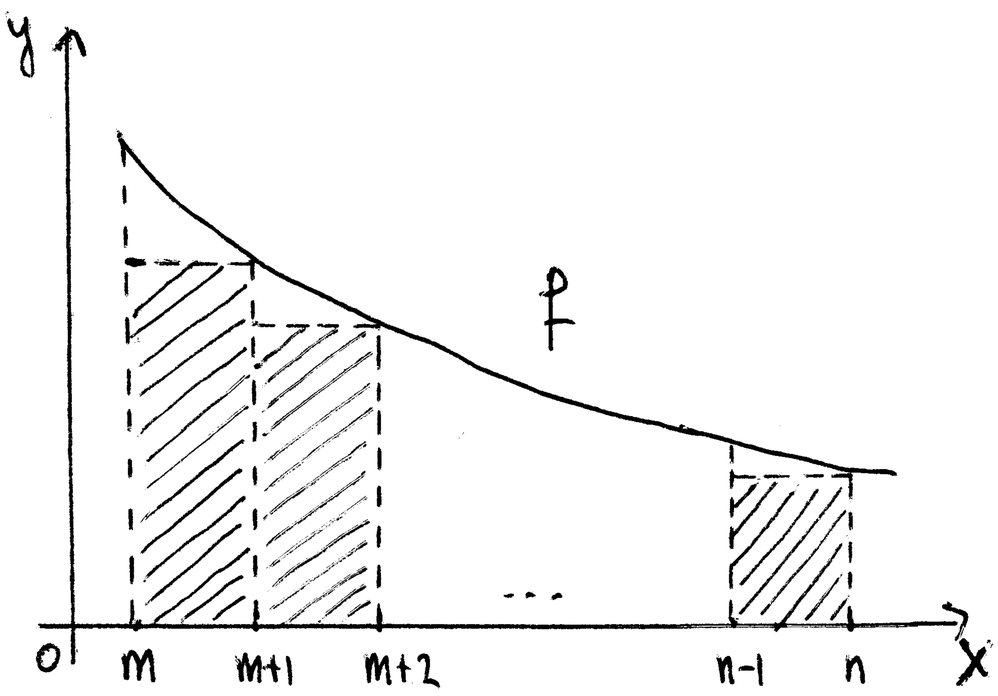
a) $\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int_m^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq m+1.$

b) $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\int_m^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

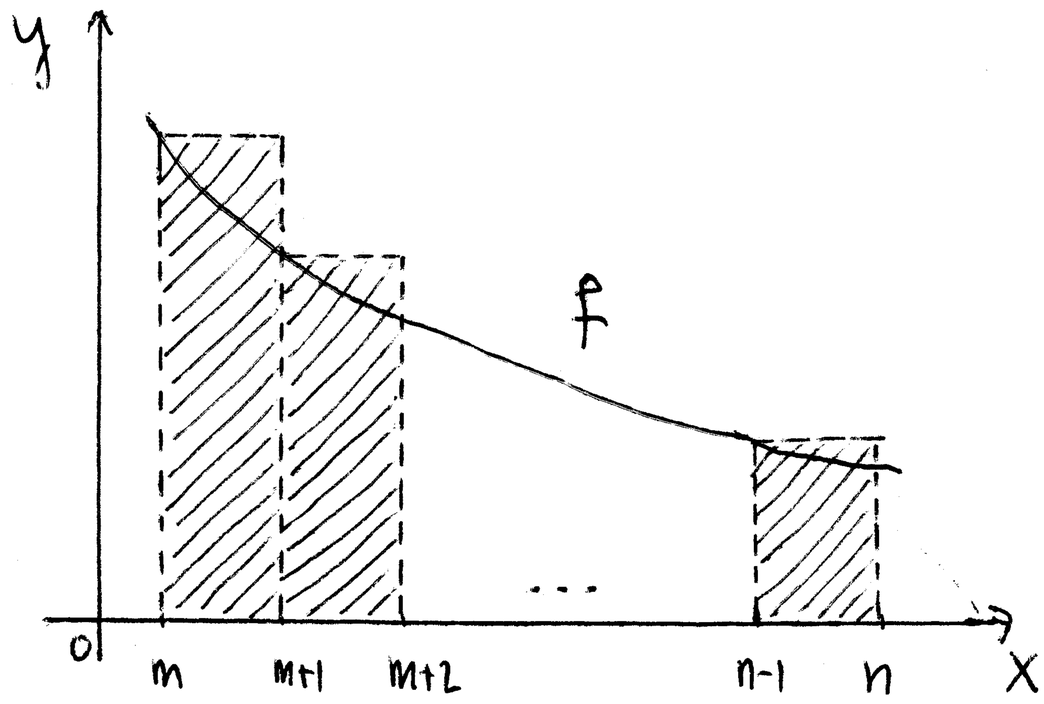
[Beachte: $\int_m^n f(x)\,dx$ existiert $\forall n \geq m$ denn f ist monoton].

Beweis:

a)



Die schraffierte Fläche ist $\sum_{k=m+1}^{n} f(k)$.



Die schraffierte Fläche ist $\sum_{k=m}^{n-1} f(k)$.

b) "$\Rightarrow$" Sei $s := \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ und $F(R) := \int_m^R f(x)\,dx \quad (R \geq m)$.

F ist monoton steigend (denn $f \geq 0$) und aus der 2. Ungleichung von a) folgt $F(R) \leq s \ \forall R \geq m$. Also existiert $\lim_{R\to\infty} \int_m^R f(x)\,dx$ [s. Beweis von Satz 2.4, Ana I]. D.h. $\int_m^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

"$\Leftarrow$" Sei $a := \int_m^\infty f(x)\,dx$. $\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + \sum_{k=m+1}^{n} f(k) \overset{a)}{\leq} f(m) + \int_m^n f(x)\,dx \overset{f\geq 0}{\leq} f(m) + a$

$\forall n \geq m$. Also konvergiert $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$. [S. Lemma 3.2 aus Ana I]. $\square$

Beispiel: Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s>0$.

Bekannt aus Ana I:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert $\xRightarrow[\text{für Reihen}]{\text{Min. Krit}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ divergiert für $s<1$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert $\xRightarrow[\text{für Reihen}]{\text{Maj. Krit.}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s \geq 2$.

Bleibt der Fall $s \in]1,2[$ zu untersuchen. Sei $s \in]1,2[$.

Die Funktion $f: [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^s}$ ist monoton fallend und ≥ 0.

Also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert $\overset{1.16}{\Longleftrightarrow}$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$ konvergiert.

Da $s>1$ konvergiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$ [s. Beispiel 1), S. 28]. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $1<s<2$.

Längen und Volumen

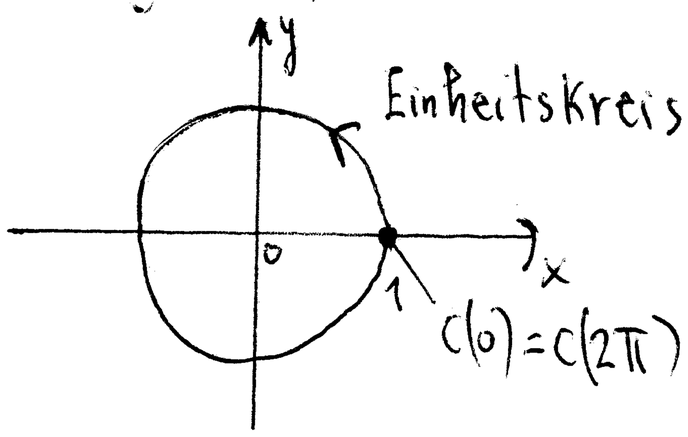
1) Länge einer Kurve

Def: Eine Abbildung $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt
$t \longmapsto (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))$

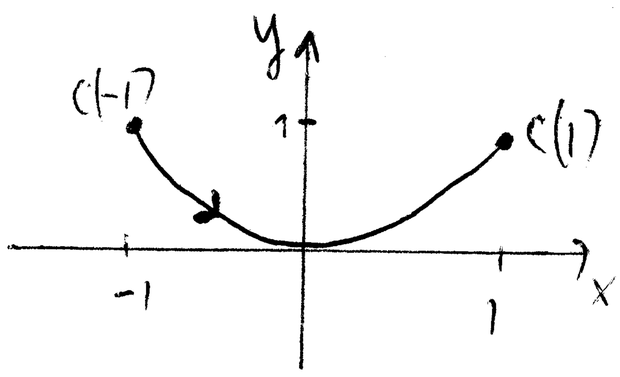
Intervall

Kurve falls jedes $c_i: I \to \mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots,n)$ stetig diff. ist.

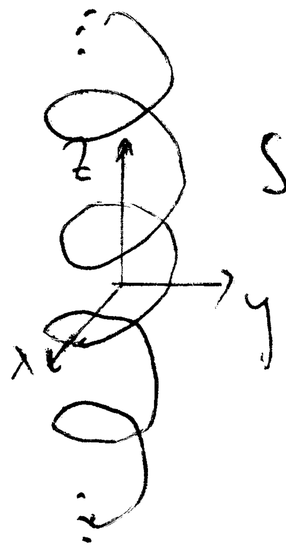
Beispiele: a) $c: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$



b) $c: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (t, t^2)$



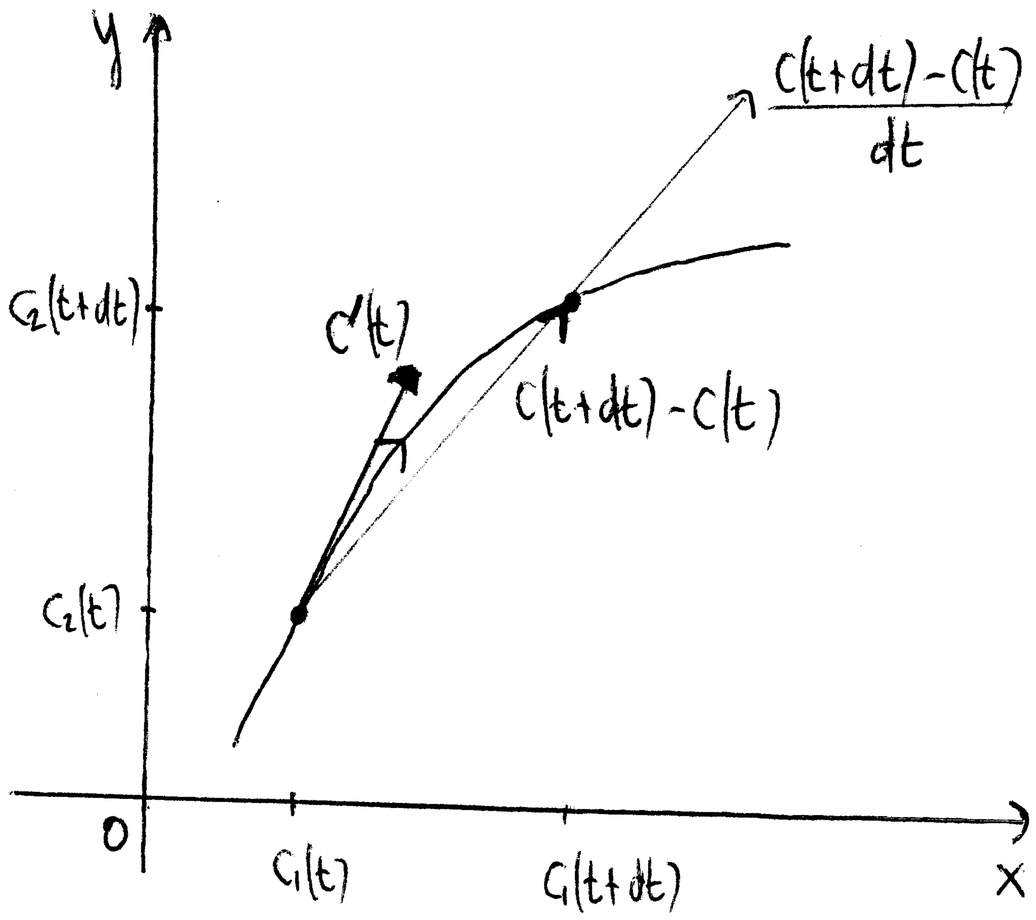
c) $c: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$.



Schraubenlinie

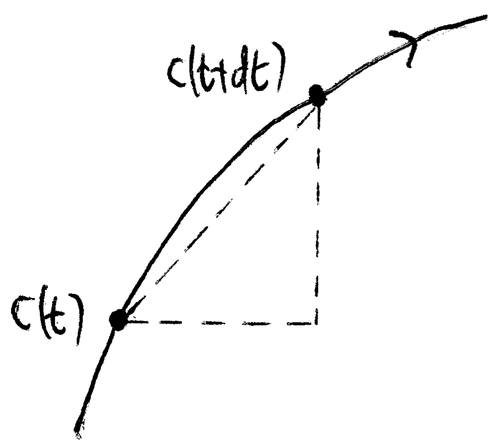
Def: Sei $c: I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$.

a) $c'(t) := (c_1'(t), c_2'(t), \dots, c_n'(t))$ heißt Tangentialvektor der Kurve c zum Parameter t. [Falls $c(t)$ die Bahn eines Teilchens beschreibt, dann ist $c'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens zur Zeit t.]



b) $\|c'(t)\| := \sqrt{c_1'(t)^2 + c_2'(t)^2 + \dots + c_n'(t)^2}$ heißt die Norm von $c'(t)$.

Länge von $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$



Länge der "Hypotenuse" =

$$\|c(t+dt) - c(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i(t+dt) - c_i(t))^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{c_i(t+dt) - c_i(t)}{dt}\right)^2 (dt)^2} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i'(t)^2}\, dt = \|c'(t)\|\, dt.$$

Def: Die Länge von $c: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ wird definiert durch

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\|\, dt.$$

Beispiel:

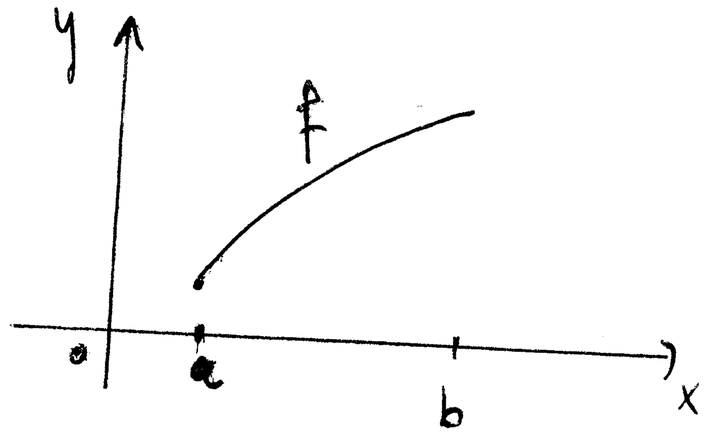
$c: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$c(t) = (\cos t, \sin t)$

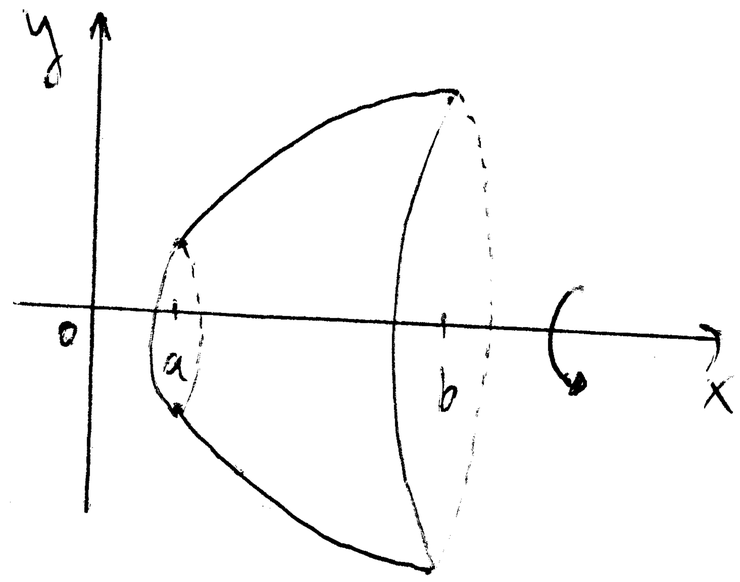
$$L(c) = \int_0^{2\pi} \|c'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \|(-\sin t, \cos t)\|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

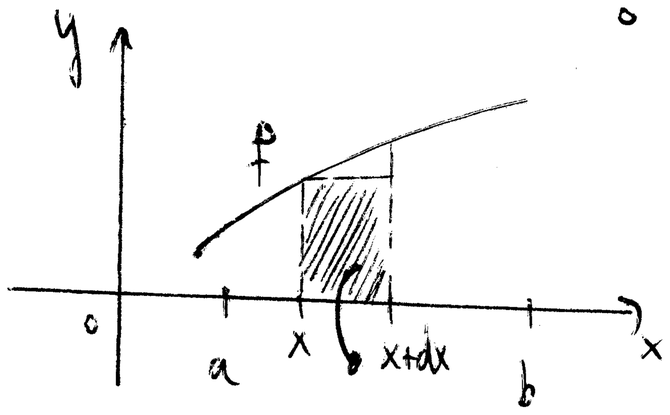
2) Volumen eines Rotationskörpers



Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0$.
Lässt man den Graphen von f im Bereich $[a,b]$ um die x-Achse rotieren entsteht ein Rotationskörper.



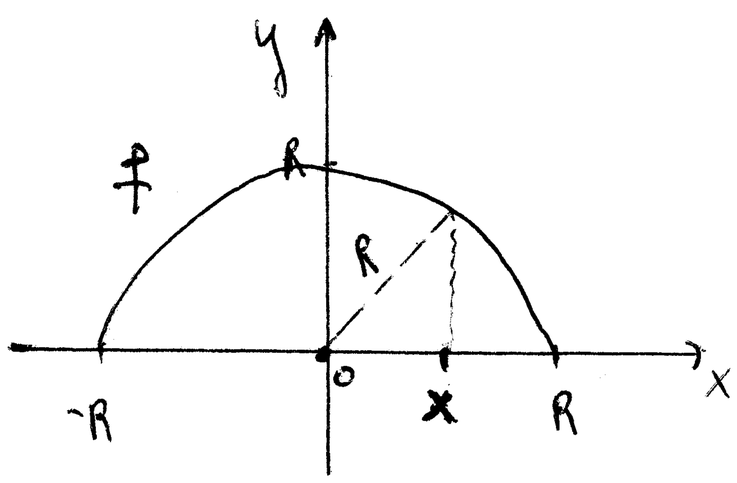
Volumen = ?



Das Volumen des Zylinders mit Radius $f(x)$ und Höhe dx ist $\pi f(x)^2 dx$.
Daher die folgende Definition:

Def: $$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Beispiel: Volumen einer Kugel vom Radius $R > 0$.



$$f(x) \overset{\text{Pyth}}{=} \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R.$$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} f(x)^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - 0 + 0\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$