Themen und Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

[Sch]: R.-H.Schulz:Repetitorium Bachelor Mathematik

[Sch-LAI] R.-H.Schulz: Skript Linearer Algebra I

Themenkreis 3: Lineare Gleichungssysteme

1. Wie lässt sich eine lineare Abbildung mit dem linearen Gleichungssystem (LGS)

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m \end{cases}$$

(mit $\alpha_{ij}, \beta_i \in K$ und Unbestimmten ξ_j) in Verbindung bringen? Wie lassen sich dann die Lösungsmengen L und L_0 des LGS $(*)$ bzw. des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems interpretieren?

Antwort (vgl. [Sch] p. 17)

(i) Das LGS $(*)$ lässt sich mit

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1\cdots m \\ j=1\cdots n}},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in K^m$$

in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ bzw. $f_A(\vec{x}) = \vec{b}$ schreiben; hierbei ist $f_A : K^n \to K^m$ definiert durch $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$.

(ii) Das zu $(*)$ gehörende **homogene System**

$$(**) \quad \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n = 0 \end{cases}$$

hat die Lösungsmenge $L_0 = \{\vec{x} \in K^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\ \} = \mathrm{Kern} f_A$. Damit ist L_0 ein Unterraum von K^n.

Der Lösungsraum von $(*)$, also $L = \{\vec{x} \in K^n \mid A\vec{x} = \vec{b}\}$, ist gleich dem vollen Urbild $f_A^{-1}(\vec{b})$ von $\vec{b}$ unter f_A. Damit folgt:

Das LGS $(*)$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in \mathrm{Bild} f_A$ gilt. Da das Bild von f_A gleich dem von den Spaltenvektoren von A erzeugten Raum ist, ergibt sich das Lösbarkeitskriterium:

Genau dann ist $(*)$ lösbar, wenn $\vec{b}$ von den Spalten von A linear abhängt, also für die erweiterte Koeffizientenmatrix gilt:

$$\operatorname{Rang}(A|b) = \operatorname{Rang} A\,.$$

(iii) Ist das LGS $(*)$ lösbar, so existiert ein $\vec{p}$ mit $f_A(\vec{p}) = \vec{b}$ (eine "spezielle Lösung" oder "**Partikulärlösung**"). Für das volle Urbild von $\vec{b}$ unter f_A gilt dann $L = f_A^{-1}(\vec{b}) = \vec{p} + \operatorname{Kern} f_A$, also $L = \vec{p} + L_0$; es ist L also ein affiner Unterraum von K^n zum Unterraum L_0. Für diesen affinen Unterraum gilt $\dim_K L = n - \operatorname{Rang} A$.

2. **Beispiel 1:** Sei $K = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mitttels elementarer Zeilenumformungen den Lösungsraum des LGS's

$$(*)\left\{\begin{array}{ccccccc} \xi_1 & + & \xi_2 & -\xi_3 & & = & 0 \\ \xi_1 & - & 2\xi_2 & +\xi_3 & & = & 1 \\ \xi_1 & - & 2\xi_2 & & -\xi_4 & = & 2 \\ & & & \xi_3 & +2\xi_4 & = & -1 \end{array}\right. .$$

Antwort (vgl. [Sch] p. 18f.):

Es ist $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$.

Durch elementare Zeilenumformung erhält man z.B. (mit unterstrichenen Pivot-Elementen):

$$(A|b) \underset{\substack{z_2'=z_2-z_1 \\ z_3'=z_3-z_1}}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{-3} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{z_3''=z_3'-z_2'}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{z_4'=z_4+z_3'' \\ z_2''=\frac{1}{3}z_2'}}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow (\star)\left\{\begin{array}{lllll} \xi_1 & +\,\xi_2\,- & \xi_3 & & =0 \\ & -\,\xi_2\,+ & \frac{2}{3}\xi_3 & & =\frac{1}{3} \\ & & -\xi_3 & -\xi_4 & =1 \\ & & & \xi_4 & =0 \end{array}\right.$$

woraus sich $\xi_4 = 0,\ \xi_3 = -\xi_4 - 1 = -1,\ \xi_2 = \frac{2}{3}\xi_3 - \frac{1}{3} = -1$ und $\xi_1 = -\xi_2 + \xi_3 = 0$ ergibt. Das LGS $(\star)$ und damit $(*)$ ist also eindeutig lösbar mit $L = \{(0, -1, -1, 0)\}$.

3. **Beispiel 2:**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(*)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +8x_3 & = & 5 \\ & x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

über $\mathbb{R}$.

(i) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ an!

(ii) Begründen Sie zunächst ohne Berechnung der Lösungen, dass $(*)$ lösbar ist!

(iii) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform!

(iv) Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $(*)$!

(v) Geben Sie eine allgemeine Lösung des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems an!

(vi) Geben Sie den Lösungsraum L von $(*)$ an!

Lösung (vgl. [Sch] Aufgabe L35)

(i) Die erweiterte Koeffizientenmatrix von $(*)$ ist

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | \, 1 \\ 3 & 2 & 8 & | \, 5 \\ 0 & 1 & 1 & | \, 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) A_{erw} hat den gleichen Rang wie die Koeffizientenmatrix A von $(*)$. (Dies folgt z.B. daraus, dass die letzte Spalte von A_{erw} gleich der Summe der beiden ersten Spalten ist, sodass die Erweiterung nicht den Rang erhöht.) Nach dem bekannten Lösbarkeitskriterium ergibt sich die Lösbarkeit von $(*)$ aus Rang $A =$ Rang A_{erw}.

(iii) Zum Beispiel:

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | \, 1 \\ 3 & 2 & 8 & | \, 5 \\ 0 & 1 & 1 & | \, 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | \, 1 \\ 0 & 2 & 2 & | \, 2 \\ 0 & 1 & 1 & | \, 1 \end{pmatrix} \quad (\overline{z_2} = z_2 - 3z_1)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 2 & | \, 1 \\ 0 & | \, \underline{1} & \underline{1} & \underline{| \, 1} \\ 0 & 0 & 0 & | \, 0 \end{pmatrix} \quad (\overline{\overline{z_2}} = \frac{1}{2}\overline{z_2} \;\text{ und }\; \overline{\overline{z_3}} = \overline{z_3} - \overline{\overline{z_2}}).$$

(iv) Da elementare Zeilenumformungen den Lösungsraum nicht verändern, sind die Lösungen von $(*)$ genau die Lösungen von

$$(*_1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ & x_2 & + \; x_3 & = & 1 \end{array} \right. \quad .$$

Setzt man nun $x_3 = 0$, so sieht man, dass z.B. $x_p = (1, 1, 0)$ eine Lösung von $(*_1)$ und damit von $(*)$ ist.

(v) Der Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen Systems ist gleich dem Lösungsraum des zu $(*_1)$ gehörenden homogenen Systems, also von

$$(*_1') \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ & x_2 & + \; x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Es folgt $L_0 = \{(-2x_3, -x_3, x_3) | x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(-2, -1, 1)x \mid x \in \mathbb{R}\} = (-2, -1, 1)\mathbb{R}$.

(*Alternativ* kann man $x_3 = 1$ in $(*_1')$ setzen und so $(-2, -1, 1) \in L_0$ sehen. Das obige Ergebnis ergibt sich dann z.Bsp. aus Dimensionsgründen.)

(vi) Der Lösungsraum von $(*_1)$ und damit von $(*)$ ist nach einem Satz gleich $x_P + L_0$, also

$$L = (1, 1, 0) + (-2, -1, 1)\mathbb{R} = \{(1 - 2x, 1 - x, x) | x \in \mathbb{R}\}.$$