Wiederholung und Vertiefung zu
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

[Sch]: R.-H.Schulz:Repetitorium Bachelor Mathematik

[Sch-LAI] R.-H.Schulz: Skript Linearer Algebra I

Themenkreis 1: a) Vektorraum, Unterraum b) Basis, Dimension

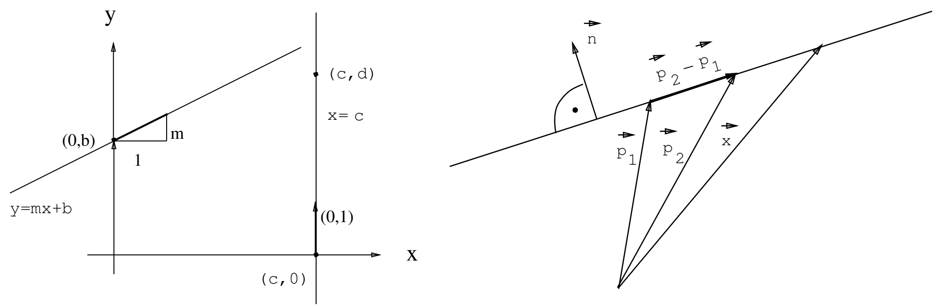
a) Vektorraum, Unterraum

1. Modell für die Zeichenebene, für den Anschauungsraum

   - Welche Modelle?
     $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$
   - Geradengleichungen (verschiedene Formen)
     $y = mx+b$ und $x = c$ bzw. Punkt-Richtungsgleichung $\vec{x} = k\vec{m}+\vec{b}$, Zweipunktegleichung
     Ebenengleichungen (verschiedene Formen)
     3-Punkte-Gleichung; Gleichung mithilfe Normalenvektor und (kanonischem) Skalarprodukt $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (Hessesche Normalform, falls $|\vec{n}| = 1$); s.auch [Sch] p.19-22

     Im 2-dimensionalen affinen Raum:

     a) *vektorielle Punkt-Richtungs-Form*: $\mathbf{x} = \mathbf{p}+k\mathbf{m}$ mit Ortsvektor $\mathbf{x}$ eines beliebigen Punktes der Geraden g, "Aufpunkt" $\mathbf{p}$, bis auf Vielfache bestimmtem Richtungsvektor $\mathbf{m}$ von g und Skalar k (aus dem Grundkörper K des Vektorraums).
     b) *vektorielle Zwei-Punkte-Form*: $\mathbf{x}=\mathbf{p}_1 + k(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)$ mit verschiedenen Punkten $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ von g und $k \in K$ (s. Abb. 3 b).
     c) *Koordinatengleichung* : $ax + by + c = 0$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$.
        Anmerkung : Setzt man in der vektoriellen Punkt-Richtungsform aus a) $\mathbf{x} = (x, y)$, ferner $\mathbf{m} = (1, m)$ und $\mathbf{p} = (0, b)$ bzw. $\mathbf{m} = (0, 1)$ und $\mathbf{p} = (c, d)$, so erhält man als Koordinatengleichung $y = mx + b$ bzw. $x = c$ (s. Abb. 3 a).
     d) Hessesche Normalform in EG($\mathbb{R}^2$) (s. Abbildung 3 b)



a) b)

Abbildung 3 a) Zur Koordinatengleichung einer Geraden b) Zur vektoriellen Geradengleichung:
$\vec{x} = \vec{p_1} + k(\vec{p_2} - \vec{p_1})$ bzw. $(\vec{x} - \vec{p_1})\vec{n} = 0$ mit $\vec{n} \perp (\vec{p_2} - \vec{p_1})$.

Im 3-dimensionalen affinen Raum :
a), b) vektorielle Punkt-Richtungs- bzw. Zwei-Punkte-Formen wie unter 1.

c) *Koordinatengleichungen* :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d = 0 \end{cases} \quad \text{mit}$$

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \ .$$

Anmerkung : Hierbei sind (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) (bei kanonischem Skalarprodukt) bis auf Normierung die Normalenvektoren von 2 Ebenen, deren Schnitt die Gerade ist. Die Rang-Bedingung bewirkt, dass die Ebenen nicht parallel sind.

2. **Definition und Beispiele von Vektorräumen**

- Definition Vektorraum
  s.[Sch] p.1
  Gegeben sei ein Körper K (als "Skalarbereich"),
  z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ oder ein endlicher Körper $\mathrm{GF}(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p, \mathrm{GF}(p^s)$. Dann heißt $(V, \oplus, \overset{\cdot}{K})$ ein **K–Vektorraum** (K–VR), falls $(V, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist und die sogenannte S–Multi-

plikation[1]
$\dot{K} : K \times V \to V$ mit $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ folgende Gesetze (für alle $v, w \in V,\ \lambda, \mu \in K\ ,\ 1 = 1_K$) erfüllt:

– das gemischte Assoziativgesetz	$(\lambda \cdot \mu)v$	$=$	$\lambda(\mu v)$
– die gemischten Distributivgesetze	$(\lambda + \mu)v$	$=$	$\lambda v \oplus \mu v$ und
	$\lambda(v \oplus w)$	$=$	$\lambda v \oplus \lambda w$
– und die Gleichung	$1v$	$=$	v

- K^n
- $K[X]$
  Algebra (!) der Polynome mit Koeffizienten aus K
- $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$
  allgemeiner: Köper über Unterkörper
- $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$
  VR der stetigen reellwertigen Abbildungen des Intervalls $[a, b]$
- $K^{(m,n)}$
  VR der $m \times n-$Matrizen über K

3. Definition und Beispiele von Unterräumen
   s.[Sch] p.4

4. Unterraumkriterium
   s.[Sch] p.4

5. Definition affiner Unterraum (Lineare Mannigfaltigkeit)
   s.o. und [Sch] 19-21

b) Basis, Dimension

1. Definition Lineare Unabhängigkeit, Linearkombination, Erzeugendensystem
   s.[Sch] p.4-6

2. Basis: Definition, Existenz (Basisexistenzsatz), Mächtigkeit/Dimension
   s.[Sch] p. 7-8

3. Man zeige, dass jeder $n-$ dimensionale Vektorraum über dem Körper K isomorph (Def.?) zu K^n ist!
   s.[Sch]p.10

[1]Wegen der Kommutativität der Multiplikation in K kann man auch $v\lambda(:= \lambda v)$ schreiben; alternativ kann man auch $\dot{K} : V \times K \to V$ definieren.