Aufgabe W2 (Matrix-Darstellung, Rang, Rang einer linearen Abbildung)
Seien V ein $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Basis (b_1, b_2, b_3, b_4) und W ein $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Basis (c_1, c_2, c_3, c_4), ferner $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ mit

$$\begin{aligned} f(b_1) &= c_1 + c_2 \\ f(b_2) &= c_1 + c_3 \\ f(b_3) &= c_2 + c_4 \\ f(b_4) &= c_1 + c_3\alpha. \end{aligned}$$

1. Geben Sie die Matrix $M := M_C^B(f)$ von f bzgl. des Basispaares (B, C) an!

2. Berechnen Sie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ohne Begründung!), und geben Sie damit oder direkt $f(v_0)$ für $v_0 := b_1 + b_2 - b_3 - b_4$ an!

3. Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(M)$ und $\mathrm{Rang}(f)$ in Abhängigkeit von α .

4. Für welche Werte α ist f ein Isomorphismus?

Lösungsskizze:

1. In der $j-$ten Spalte von $M = M_C^B(f)$ stehen die Koordinaten von $f(b_j)$ bzgl. der Basis C. Damit erhält man

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\alpha \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$f(v_0) = c_1 + (1-\alpha)c_3 - c_4.$$

Alternativ direkt:
$f(v_0) = f(b_1 + b_2 - b_3 - b_4) = f(b_1) + f(b_2) - f(b_3) - f(b_4) =$
$c_1 + c_2 + c_1 + c_3 - c_2 - c_4 - c_1 - c_3\alpha = c_1 + (1-\alpha)c_3 - c_4.$

3. Wir betrachten z.B. die Spalten von M. Aus dem Ansatz

$$(*) \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man zunächst durch Setzung von $\rho = 0$ aus Zeile 3 dann $\mu = 0$, aus Zeile 4 auch $\nu = 0$ und schließlich $\lambda = 0$ aus Zeile 1. Dies zeigt die lineare Unabhängigkeit der ersten 3 Spalten von M und damit

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M \geq 3.$$

Im Fall $\alpha = 1$ sind die 2. und 4. Spalte von M gleich. Es folgt

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M = 3.$$

Ist aber $\alpha \neq 1$, so erhält man aus $(*)$ (ohne Vorgabe von ρ) dann $\nu = 0$ (s. 4.Zeile), $\lambda = 0$ (s. 2.Zeile) und $\mu + \rho = 0 = \mu + \alpha\rho$ aus der 1. und 3. Zeile. Es folgt $\rho = 0 = \mu$. Im Fall $\alpha \neq 1$ gilt also

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M = 4.$$

Alternativ mittels elementarer Zeilenumformungen:
Durch elementare Zeilenumformungen erhält man aus M (z.B. mit $z_2' = z_2 - z_4$ und $z_1' = z_1 - z_2' - z_3$)

$$M \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Da sich der Rang einer Matrix bei elementaren Zeilenumformungen nicht ändert, folgt

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M = 3 \quad \text{falls } \alpha = 1$$

und

$$\text{Rang } f = \text{Rang } M = 4 \quad \text{ falls } \alpha \neq 1.$$

Alternativ mittels Determinanten:
Durch Entwicklung von $\det M$ nach der 4.Zeile erhält man:

$$\det M = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 1.$$

Dies zeigt, dass M und f für $\alpha \neq 1$ vollen Rang (also Rang 4) haben.

Ist $\alpha = 1$, so Rang $M \leq 3$; wegen dreier unabhängiger Zeilen von M ist Rang $M \geq 3$, insgesamt also: Rang $f =$ Rang $M = 3$.

4. Nach 3. ist Rang $M = 4$ genau im Fall $\alpha \neq 1$, also dann $\dim f(V) = 4 = \dim W$; d.h. f ist surjektiv und (nach einem Satz) damit bijektiv. Im Fall $\alpha = 1$ ist f (u.a. aus Dimensionsgründen) kein Isomorphismus.