Aufgabe W3 (Unterraum, Basis, lineare Fortsetzung, Matrix-Darstellung)

(i) Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung, also $f \in \mathrm{End}_K(V)$! Mit $\mathrm{Fix}(f)$ bezeichnet man die Menge der Fixpunkte von f, also

$$\mathrm{Fix}(f) := \{v \in V \mid f(v) = v\}.$$

Zeigen Sie :

$$\mathrm{Fix}(f) \text{ ist ein Unterraum von } V.$$

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier das Unterraum-Kriterium anwenden!

(ii) Seien $E = m\mathbb{R} + n\mathbb{R}$ (mit m, n linear unabhängig) eine Nullpunktebene im $\mathbb{R}-$Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$. Gibt es eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $\mathrm{Fix}(f) = E$ und $f \neq \mathrm{id}$? Begründen Sie Ihre Behauptung!
Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier den Basisergänzungssatz und den Satz über die lineare Fortsetzung anwenden.

(iii) Seien nun speziell $m_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ und $n_1 = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ sowie $E_1 = m_1\mathbb{R} + n_1\mathbb{R}$, ferner $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{Fix}(f_1) = E_1$ sowie $f_1((0, 0, 2)) = (2, 0, 0)$. Bestimmen Sie $M_B^B(f_1)$ für die kanonische Basis $B = (e_1, e_2, e_3)$!

Lösungsskizze:

(i) Sei $U := \mathrm{Fix}(f)$. Laut Definition ist $U \subseteq V$ und wegen $f(0) = 0$ auch $U \neq \emptyset$. Um das Unterraumkriterium (Satz 6.5 der Vorlesung) anwenden zu können, zeigen wir noch die Abgeschlossenheit von U bzgl. Addition und S-Multiplikation. Seien $v, w \in U$! Aus der Linearität von f und aus $f(u) = u$ sowie $f(w) = w$ folgt dann

$$f(v + w) = f(v) + f(w) = v + w \quad \text{sowie} \quad f(v\lambda) = f(v)\lambda = v\lambda,$$

also $v + w \in U$ und $v\lambda \in U$. Das Unterraum-Kriterium liefert die Behauptung.

(ii) Es gibt eine solche Abildung f:

Nach dem Basisergänzungssatz kann man (m, n) zu einer geordneten Basis $B = (m, n, v)$ ergänzen .

1.Möglichkeit der weiteren Argumentation:

Nach dem Fortsetzungssatz existiert dann eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(m) = m, f(n) = n$ und $f(v) = v' \neq v$. Dabei gilt also $f \neq$id, $m, n \in$ Fix(f), wegen der Unterraumeigenschaft von Fix(f) dann $E =< m, n >\subseteq$Fix(f) sowie wegen $f \neq$id aus Dimensionsgründen sogar $E =$Fix (f).

2.Möglichkeit der weiteren Argumentation:

Die Multiplikation mit einer Matrix, der Form

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefert einen Endomorphismus f mit $M_B^B(f) = M$ und $f(m) = m, f(n) = n$ und $f(v) \neq v$. Es folgt $f \neq$ id und $E =$Fix(f).

(iii) In den Spalten von $M_B^B(f_1)$ stehen die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren des Urbildraums; wegen $(m_1, n_1) = (e_1, e_2)$ und $m_1, n_1 \in$Fix(f_1) folgt $f_1(e_1) = e_1$ und $f(e_2) = e_2$. Wegen der Linearität von f_1 ergibt sich aus $f_1((0, 0, 2)) = (2, 0, 0))$ dann $f_1((0, 0, 1)) = (1, 0, 0)$. Es folgt

$$M_B^B(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$