Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe E2 (Affine Abbildung)

In der affinen Geometrie $\mathrm{AG}(K^n)$ sei $f_1 : K^n \to K^n$ eine affine Abbildung mit zugehöriger linearer Abbildung f_A und zugehöriger Translation f_{t_1}, und sei $f_2 = f_{t_2}$ eine Translation um den Vektor t_2 (mit $A \in K^{(n,n)}$ und $t_1, t_2 \in K^n$).
Welche Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von

$$f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 \ ?$$

Lösungsskizze
Definitionsgemäß gilt $f_1(x) = Ax + t_1$ und $f_2(x) = x + t_2$; daraus ergibt sich $f_2 \circ f_1(x) = f_2(Ax+t_1) = Ax+t_1+t_2$ und $f_1 \circ f_2(x) = f_1(x+t_2) = Ax+(At_2+t_1)$. Folglich ist $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ genau dann, wenn $t_1 + t_2 = At_2 + t_1$ gilt; (die eine Richtung sieht man, wenn man $x = 0$ setzt, die andere ist offensichtlich.) Notwendig und hinreichend für die Vertauschbarkeit der beiden Abbildungen ist daher $At_2 = t_2$, d.h. dass t_2 unter f_A fix bleibt. $\square$