Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe D4* (Produkt von speziellen Spiegelungen und Drehungen)

Sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt, bezeichne σ die Spiegelung an der $x-$Achse und δ_α die Drehung um den Nullpunkt um den Winkel vom Maß α !
Zeigen Sie analytisch (also mit Mitteln der Linearen Algebra):
Das Produkt

$$\sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$$

ist eine Drehung um den Winkel $-\alpha$.

Lösungsskizze
Die Matrizen von σ und δ_α bezüglich der kanonischen Basis haben die Form

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{\delta_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Das Produkt $\delta := \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$ hat dann als Matrix das Produkt der Matrizen $M_\sigma^{-1} \cdot M_\alpha \cdot M_\sigma$, wegen $\sigma^{-1} = \sigma$ also:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}.$$

Daher ist δ die Drehung um den Nullpunkt um den Winkel vom Maß $-\alpha$. $\square$