Übung z.Lehrkräfteweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra I'

Aufgabe D1 (Kern, Bild linearer Abbildungen)

Bestimmen Sie Kern und Bild folgender linearer Abbildungen!

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, \eta, 0)$ (Projektion auf die $\xi - \eta$–Ebene).

(b) $L : \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, (a_n) \text{ ist konvergent}\} \to \mathbb{R}$ mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lösungsskizze:

(a) Definitionsgemäß ist Kern $(f) = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid f(\xi, \eta, \zeta) = (0,0,0)\}$, hier also $\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid (\xi, \eta, 0) = (0,0,0)\}$. Es folgt
Kern $(f) = \{(0,0,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \zeta \in \mathbb{R}\}$, also die Gerade durch $(0,0,0)$ in Richtung von e_3.
Bild $(f) = \{(\xi, \eta, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi, \eta \in \mathbb{R}\}$ (also die ganze $\xi - \eta-$ Ebene).

(b) Kern $(L) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\}$, also der Raum aller reellen Nullfolgen.
Bild $(L) = \mathbb{R}$; denn für $a \in \mathbb{R}$ konvergiert z.B. die konstante Folge $(a, a, a, ., ., \ldots)$ gegen a.