Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra I'

Aufgabe D10 (Lineare Abbildung, Kern, Dimensionssatz)

Sei $H \in \mathbb{F}_2^{(3,7)}$ die folgende Matrix mit Einträgen aus $\mathrm{GF}(2) = \mathbb{F}_2$:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung

$$S_H : \mathbb{F}_2^7 \to \mathbb{F}_2^{(3,1)} \text{ mit } x \mapsto H \cdot x^T$$

heisst dann Syndrom-Abbildung. Die Elemente von $\mathcal{C} := \text{Kern } S_H$ nennen wir Codewörter aus $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ selbst einen $(7,4)-$Hammingcode.

(a) Bestimmen Sie $|\mathcal{C}|$, also die Anzahl der Codewörter, unter Verwendung der Formel $\dim_K V = \dim_K \text{Kern } f + \dim_K \text{Bild } f$ für $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ und V, W endlich-dimensional.

(b) Sei $y = c + e$ ein durch den Fehler e aus c verfälschtes Wort. Bestimmen Sie $S_H(y)$ in Abhängigkeit von e (und H) !

(c) Bestimmen Sie $S_H(y)$, falls $e = e_i$, der i-te Einheitsvektor ist!

(d) Korrigieren Sie das Wort $y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zum Codewort c, wenn e einer der Einheitsvektoren ist!