

Übung zur Lehrkräfteweiterbildung Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe C 5 (Basis, Basis-Ergänzung)

Sei $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ Basis eines \mathbb{R} -Vektorraumes V ; seien ferner

$$\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2, \quad \vec{a}_2 = \vec{b}_2 + \vec{b}_3 + \vec{b}_4, \quad \vec{a}_3 = \vec{b}_3 - \vec{b}_4$$

und $U = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$ der von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ aufgespannte Unterraum.

- (a) Zeigen Sie: $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ist eine Basis von U .
- (b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x} = 6\vec{b}_1 - 5\vec{b}_2 - 4\vec{b}_4$ bezüglich A .
- (c) Ergänzen Sie A zu einer Basis von V .

Lösungsskizze

- (a) A spannt U nach Definition auf. Zu zeigen ist nur, dass A linear unabhängig ist.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}_B = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

(b) Aus $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix}_B$ folgt $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$.

So erhält man $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_A$.

- (c) Wegen $\dim V > \dim U$ können nicht alle Vektoren aus B in U sein. Z.B. ist $b_4 \notin U$. Daher ist $A \cup \{b_4\}$ Basis von V .