Übung zur Lehrkräfteweiterbildung Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe C4 (Basis)

Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\begin{array}{rrr} (\ 0, & 1, & 1\ ) \\ (-1, & 0, & 1\ ) \\ (-1, & -1, & 0\ ) \end{array}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden!

Lösungsskizze

Heuristik:
Sei $(0,1,1)\lambda + (-1,0,1)\mu + (-1,-1,0)\nu = 0$.
Dann gilt $(0-\mu-\nu, \lambda+0-\nu, \lambda+\mu+0) = (0,0,0)$; daraus ergibt sich $\lambda = \nu = -\mu$.
Umgekehrt erfüllen $\lambda = \nu = -\mu = 1$ die obige Gleichung.

Behauptung:
Die angegebenen Vektoren bilden keine Basis, da sie linear abhängig sind.
Beweis (inspiriert durch die Heuristik):
Z.B. ist $(0,1,1) - (-1,0,1) + (-1,-1,0) = (0,0,0)$ eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors.
Anmerkung: Bei analoger Bildung von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ sind diese linear unabhängig für gerades n, linear abhängig für ungerades n.