

# Übung zur Lehrkräfteweiterbildung Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

## Aufgabe C3 (Lineare Unabhängigkeit binär)

(i) Gegeben seien die Vektoren  $p_1$  bis  $p_9$  aus  $\mathbb{F}_2^9$  mit:

$$\begin{aligned} p_1 &:= 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_2 &:= 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ p_3 &:= 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_4 &:= 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_5 &:= 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_6 &:= 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ p_7 &:= 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_8 &:= 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_9 &:= 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Vektoren linear abhängig sind!

*Lösungshinweis:* Kombinieren Sie geeignete dieser Vektoren zum Nullvektor!

(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren  $q_1, q_2, q_3$  und  $q_4$  aus  $\mathbb{F}_2^5$  linear unabhängig sind:

$$\begin{aligned} q_1 &:= 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ q_2 &:= 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_3 &:= 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_4 &:= 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{aligned}$$

### Lösungsskizze

(i) Z.B. addieren sich  $p_1, p_3$  und  $p_8$  zum Nullvektor; auch gilt  $p_2 + p_4 + p_7 + p_9 = 0$ . Wenn man diese Abhängigkeiten nicht durch Ausprobieren findet, muss man das

folgende Lineare Gleichungssystem lösen, das sich aus  $\sum_{i=1}^9 c_i p_i = 0$  ergibt:

$$\begin{array}{rcccccccccc} c_1 + & c_2 + & c_3 + & c_4 + & c_5 & & & & & & = 0 \\ & c_2 + & c_3 + & c_4 + & c_5 + & c_7 + & c_8 + & c_9 & & & = 0 \\ c_1 + & & c_3 + & & & c_7 + & & c_9 & & & = 0 \\ & & & c_4 + & & & & c_9 & & & = 0 \\ & c_2 + & & & & c_6 + & & c_9 & & & = 0 \\ & & & & & c_6 & & & & & = 0 \\ & c_2 + & & & & & c_7 & & & & = 0 \\ c_1 + & & c_3 & & & & & & & & = 0 \end{array}$$

(ii) Aus  $c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3 + c_4 q_4 = 0$  mit  $c_i \in \mathbb{F}_2$  ergibt sich durch Komponentenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 &+ c_2 & & & & & & & & & = 0 \\ c_1 &+ c_2 &+ c_3 &+ c_4 & & & & & & & = 0 \\ & & & & c_4 & & & & & & = 0 \\ c_1 & & & & & + c_4 & & & & & = 0 \\ & & & & & & c_4 & & & & = 0, \end{aligned}$$

das nur die triviale Lösung  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$  hat. Daher sind  $q_1, q_2, q_3, q_4$  linear unabhängig.