Übung zur Lehrkräfteweiterbildung Mathematik in 'Lineare Algebra/Analytische Geomerie I'

Aufgabe C2 (Lineare Unabhängigkeit)

Seien $\vec{a} = \binom{1}{2}_{\vec{e_1},\vec{e_2}}, \vec{b} = \binom{2}{1}_{\vec{e_1},\vec{e_2}}$ und $\vec{c} = \binom{2}{2}_{\vec{e_1},\vec{e_2}}$ Vektoren der reellen euklidischen Ebene. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig? Sind $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antworten (ohne Verwendung von Dimensionsargumenten)!

Lösungsskizze:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig.
Denn aus $\lambda\binom{1}{2}_{\vec{e_1},\vec{e_2}} + \mu\binom{2}{1}_{\vec{e_1},\vec{e_2}} = \binom{0}{0}_{\vec{e_1},\vec{e_2}}$ folgt

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu & = 0 \\ 2\lambda + \mu & = 0 \end{cases}$$

und daraus $\lambda = \mu = 0$.

Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig:
Falls man nicht sofort sieht, dass $\binom{1}{2}_{\vec{e_1},\vec{e_2}} + \binom{2}{1}_{\vec{e_1},\vec{e_2}} = \binom{3}{3}_{\vec{e_1},\vec{e_2}} = \frac{3}{2}\binom{2}{2}_{\vec{e_1},\vec{e_2}}$ gilt, hilft folgende
Heuristik: Aus $\binom{2}{2} = \lambda\binom{1}{2} + \mu\binom{2}{1} = \binom{\lambda+2\mu}{2\lambda+\mu}$ ergibt sich $\begin{cases} \lambda + 2\mu & = 2 \\ 2\lambda + \mu & = 2 \end{cases}$ und daraus $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$.
Probe (entscheidend wegen der Beweisrichtung):

$$\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2}} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2}} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}_{\vec{e_1},\vec{e_2}}.$$