Übung zur Lehrkräfteweiterbildung
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe C 1(Lineare Abhängigkeit, Koordinaten/ Polynome, Matrizen)

1. $\vec{a} = 1 - x$, $\vec{b} = 1 + x$, $\vec{c} = x$ sind Vektoren im Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind. Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind. Ist $\vec{c}$ allein linear abhängig?

2. Untersuchen Sie, ob im Vektorraum der $2 \times 2-$ Matrizen über $\mathbb{R}$ die Matrizen

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

   linear unabhängig sind. Ist A für sich allein linear unabhängig?

3. $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ ist eine (geordnete) Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad kleiner gleich 3.

   a) Welches Polynom hat bezüglich $\mathcal{B}$ den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

   b) Wie lautet der zum Polynom $3 - 2x + 4x^3$ gehörige Koordinatenvektor?

4. Im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 ist $\mathcal{C} = (2, 1 + x, 1 - x^2)$ (geordnete) Basis.

   a) Welches Polynom hat bezüglich $\mathcal{C}$ den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

   b) Wie lautet der Koordinatenvektor des Polynoms $1 + x + x^2$ bzgl. $\mathcal{C}$?

5. a) Zeigen Sie, dass im Vektorraum der $2 \times 2-$ Matrizen über $\mathbb{R}$

   $\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ eine geordnete Basis ist!

b) Welche Matrix hat bez. $\mathcal{D}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$?

c) Welche Koordinaten bez. $\mathcal{D}$ hat die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$?

Lösungsskizze

1. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig genau dann, wenn es Skalare $r, s, t \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle gleich null sind, so dass

$$(*) \qquad r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

gilt.

Setzt man o.B.d.A. $t = -1$, so ergibt eine Heuristik (Beweisrichtung beachten!) aus Gleichung $(*)$ die Werte $r = -\frac{1}{2}$ und $s = \frac{1}{2}$. Tatsächlich gilt:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = (-\frac{1}{2}) \cdot (1 - x) + \frac{1}{2} \cdot (1 + x) = \frac{1}{2} \cdot (-1 + x + 1 + x) = x = \vec{c}.$$

$\vec{c}$ lässt sich somit als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen; also sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.

Alternativ: $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind Polynome vom Grad 1. Der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 1 hat Dimension 2 (z.B. Basis $\{1, x\}$). Daher sind drei Vektoren dieses Raumes immer linear abhängig.

Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow s = t = 0.$$

Aus $s(1 + x) + tx = 0$ folgt $s + (s + t)x = 0$ und damit $s = 0 = s + t$, also $s = t = 0$. D.h.: die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind nicht linear abhängig.

Entsprechend ist auch $\vec{c}$ linear unabhängig, denn: $tx = 0 \Rightarrow t = 0$.

Anmerkung: Dies gilt i.A. für jeden vom Nullvektor verschiedenen Vektor.

2. Da A nicht die Nullmatrix ist, ist A linear unabhängig.
Aus
$$(sA+tB=)\ s\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$
d.h.
$$\begin{pmatrix}s-t&s+t\\s+2t&s+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$
folgt $s=t=0$. Also sind die Matrizen A und B linear unabhängig.

3. a) Das Polynom mit Koordinatenvektor $\begin{pmatrix}-1\\\frac{2}{3}\\-4\\2\end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}=(1,x,x^2,x^3)$ ist $-1+\frac{2}{3}x-4x^2+2x^3$.
b) Der zum Polynom $3-2x+4x^3$ bezüglich $\mathcal{B}$ gehörende Koordinatenvektor ist $\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\4\end{pmatrix}$.

4. a) Den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{C}$ hat das Polynom
$2\cdot 2+(-3)\cdot(1+x)+1\cdot(1-x^2)=4-3-3x+1-x^2=2-3x-x^2$.
b) Der Koordinatenvektor des Polynoms $1+x+x^2$ bzgl. $\mathcal{C}$ ergibt sich aus
$$r\cdot 2+s\cdot(1+x)+t\cdot(1-x^2)=1+x+x^2.$$
Ein Koeffizientenvergleich liefert die Äquivalenz zu
$$\begin{aligned}2r+s+t&=1\\s&=1\\-t&=1\end{aligned}$$
und damit zu $r=\frac{1}{2}, s=1, t=-1$, also den Koeffizientenvektor $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-1\end{pmatrix}$.

5. a) In $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist jedes Element $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eindeutig als Linearkombination der Elemente aus $\mathcal{D}$ darstellbar:

$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

ist äquivalent zum linearen Gleichungssysem

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_3 + x_4 & = & a \\ x_1 - x_2 & -x_3 & = & b \\ x_1 + x_2 & & = & c \\ x_1 & & = & d, \end{array}$$

das genau eine Lösung hat (die Koeeffizientenmatrix ist eine obere Dreiecksmatrix mit nicht-trivialen Diagonalelementen). Daher ist $\mathcal{D}$ Basis.

(b) Aus den obigen Berechnungen folgt:

$$\begin{array}{lll} a & = & x_1 + x_3 + x_4 = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{5} = -\frac{9}{10} \\ b & = & x_1 - x_2 - x_3 = -\frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{3}{2} \\ c & = & x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \\ d & = & x_1 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

und damit

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{lll} x_1 & = & d = -7 \\ x_2 & = & c - d = 4 + 7 = 11 \\ x_3 & = & -b - c + 2d = -3 - 4 - 14 = -21 \\ x_4 & = & a + b + c - 3d = 2 + 3 + 4 + 21 = 30 \end{array}$$

ergibt sich der gesuchte Koordinatenvektor als

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -21 \\ 30 \end{pmatrix}.$$