Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe B4 (Unterräume)[1]

Seien L, M und N Unterräume eines $K-$Vektorraums V.

(i) Zeigen Sie, dass der Schnitt

$$L \cap M := \{x \in V \,|\, x \in L \wedge x \in M\}$$

und die Summe

$$L + M := \{l + m \,|\, l \in L \wedge m \in M\}$$

Unterräume von V sind.

(ii) Gilt die folgende sogenannte modulare Identität ?

$$L \cap [M + (L \cap N)] = (L \cap M) + (L \cap N)$$

Lösungshinweise: Zu (i): Benutzen Sie das Unterraumkriterium (Vorlesungsskript Nr. 6.5 Seite 101) !
Zu (ii): Untersuchen Sie " $\supseteq$ und " $\subseteq$ " getrennt!

Lösungsskizze

(i) Wegen $0 \in L$ und $0 \in M$ gilt $0 \in L \cap M$ und $0 \in L + M$, also

$$L \cap M \neq \emptyset \neq L + M.$$

Wir zeigen: $L \cap M$ und $L + M$ sind abgeschlossen bzg. Addition und S-Multiplikation:
Seien $x_1, x_2 \in L \cap M$, also $x_1, x_2 \in L$ und $x_1, x_2 \in M$! Da L und M als Unterräume bzgl. Addition und S-Multiplikation abgeschlossen sind, folgt $(x_1 + x_2) \in L$, $(x_1 + x_2) \in M$ sowie $\alpha x_1 \in L$, $\alpha x_1 \in M$ (für $\alpha \in K$), folglich $x_1 + x_2 \in L \cap M$ und $\alpha x_1 \in L \cap M$.
Mit dem Unterraumkriterium erhält man: $L \cap M$ ist ein Unterraum von V.

[1] frei nach P.R.Halmos: Linear Algebra Problem Book. The Mathematical Association of America 1995.

Sind x_1 und x_2 in $L+M$, so existieren $l_1, l_2 \in L$ und $m_1, m_2 \in M$ mit $x_i = l_i + m_i$ (für $i = 1, 2$). Es ergibt sich

$$x_1 + x_2 = (l_1 + m_1) + (l_2 + m_2) = (l_1 + l_2) + (m_1 + m_2) \in L + M$$

und $\alpha x_1 = \alpha l_1 + \alpha m_1 \in L + M$. Wieder mit dem Unterraumkriterium erhält man: $L + M$ ist ein Unterraum von V.

(ii)

" $\supseteq$ " Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in (L \cap M) + (L \cap N) &\implies x \in L \wedge x \in M + (L \cap N) \\ &\implies x \in L \cap (M + (L \cap N)). \end{aligned}$$

" $\subseteq$ " Sei $x \in L \cap (M + (L \cap N))$; dann existieren l, m mit $m \in M, l \in L \cap N$ derart, dass $x = m + l$. Wegen $x \in L$ ist auch $m = x - l$ in L, also $m \in (L \cap M)$, insgesamt $x = m + l \in (L \cap M) + (L \cap N)$.

Mit dem Nachweis der "doppelten Inklusion" ist die modulare Identität bewiesen.