Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe A4 (Windschiefe und orthogonale Geraden, Streckenlänge)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte A, B, C, D mit den Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ sowie } \vec{d} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden $g := AB$ und $h := CD$!

(ii) Zeigen Sie, dass g und h windschief sind!

(iii) Bestimmen Sie eine zu g und h orthogonale Gerade k, die g und h schneidet!

(iv) Welche Länge hat die Strecke $\overline{GH}$ für $\{G\} := g \cap k$ und $\{H\} := h \cap k$?

Lösungsskizze

(i) Die Zweipunkteform einer Gleichung für Geraden durch die Punkte E und F mit Ortsvektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$ lautet: $\vec{x} = \vec{e} + \lambda \cdot (\vec{f} - \vec{e}) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Also ist hier $\quad \vec{x}_g = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_h = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(ii) Die Geraden sind windschief, d.h. liegen nicht in einer Ebene; denn

(i) g und h sind nicht parallel, d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, und

(ii) g und h schneiden sich auch nicht, d.h. die Gleichung $\vec{x_g} = \vec{x_h}$ hat keine Lösung (Die zweite Komponente ergibt $\lambda = -1$, die dritte $\lambda = 1$).

Alternativ:
Die Windschiefheit folgt auch aus

$$\det(\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

(iii) Der Vektor

$$\vec{v} = \vec{x}_g - \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mu \\ \lambda+1 \\ \lambda-1 \end{pmatrix}$$

verbindet den (von λ abhängigen) Punkt $\vec{x}_g$ der Geraden g mit dem (von μ abhängigen) Punkt $\vec{x}_h$ von h. Wir bestimmen λ und μ so, dass die Richtungsvektoren von g und h auf $\vec{v}$ senkrecht stehen: Aus

$$\vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man die Gleichungen $\lambda + 1 + \lambda - 1 = 0$ und $1 - \mu = 0$, also $\lambda = 0$ und $\mu = 1$. Umgekehrt steht der so erhaltene Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht auf den Geraden g und h und ist Richtungsvektor der gesuchten Geraden k.

Jeder der Punkte $\vec{x}_g \in g \cap k$ und $\vec{x}_h \in h \cap k$ kann als Stützvektor von k gewählt werden. Wählt man (mit $\lambda = 0$) den Punkt $\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in g$, der ja auch Punkt von k ist, als Stützvektor von k, so erhält man

$$k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$$

(iii') *Alternativ zu* (iii):
(a) Gesucht ist eine Gerade $k = \vec{p} + \vec{m}\,\mathbb{R}$ mit $\vec{m} \neq \vec{0}$ und $k \perp g$ sowie $k \perp h$. Ein solches $\vec{m}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf den Richtungsvektoren von g und h steht, also für den gilt: $\vec{m} \perp \vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{m} \perp \vec{d} - \vec{c}$, also

$$\vec{m} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{m} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Folglich ist

$$\vec{m} \in \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \setminus \{\vec{0}\}$$

notwendig und hinreichend für die Orthogonalität von k zu g und h.

Alternativ zu (a):

$$\vec{0} \neq \vec{m} \in < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

(b) Nun ist noch k so zu bestimmen, dass

$$\{G\} = k \cap g \neq \emptyset \neq k \cap h = \{H\}$$

gilt.

Ein Punkt von $k \cap g$ hat einen Ortsvektor der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$).

Nun soll $H = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} + \nu\,\vec{m}$ für ein geeignetes ν auf h liegen, also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda + \nu \\ \lambda - \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda, \mu, \nu, \in \mathbb{R})$$

gelten. Es folgt

$$\mu = 1, \lambda + \nu = -1 \text{ und } \lambda - \nu = 1, \text{ damit } \lambda = 0 \text{ sowie } \nu = -1.$$

Umgekehrt liegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf g und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf h und beide Punkte auf der zu g und h orthogonalen Geraden $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$.

(iv) Es gilt

$$|\overline{GH}| = |\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Anmerkung: Für diesen (kürzesten) Abstand zwischen windschiefen Geraden gibt es auch eine Formel. (S.z.B. K.P.Grotemeyer: Analytische Geometrie, Sammlung Göschen 1969, IV.9)