

Übung zum Lehrkräfte Weiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe A3 (Dreieck: Schwerpunkt-Koordinaten, Flächeninhalt)¹

Sei ΔABC ein Dreieck im reellen euklidischen Raum! Die kartesischen Koordinaten der Ortsvektoren von A, B und C seien:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

- (1) Wie lautet eine Parametergleichung der Seitenhalbierenden durch C ?
- (2) Welche Koordinaten hat der Schwerpunkt (d.h. der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) S von ΔABC ?

Hinweis: Sie dürfen den entsprechenden Satz aus der Vorlesung verwenden!

- (3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt F von ΔABC !

Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie hier verwenden, dass $F = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$ mit $\vec{u} := \vec{AB}$ und $\vec{v} := \vec{AC}$ gilt.

Lösungsskizze

- (1) Der Mittelpunkt M der Strecke \overline{AB} hat den Ortsvektor

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ die Gerade } MC \text{ damit die Gleichung}$$

$$\vec{x} = \vec{m} + t(\vec{c} - \vec{m}) = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 - \frac{13}{2} \\ 1 - 4 \\ 11 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

- (2) Für den Ortsvektor \vec{s} von S erhalten wir unter Verwendung des entsprechenden Satzes der Vorlesung:

$$\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}.$$

¹frei nach K.P.Grotemeyer: Analytische Geometrie III.3

Anmerkung: S erfüllt die Geradengleichung aus (1) mit $t = \frac{1}{3}$.

(3) Mit $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 + 32 \\ -99 + 24 \\ -36 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -75 \\ -30 \end{pmatrix};$$

somit ist

$$F = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \sqrt{10^2 + 75^2 + 30^2} = \frac{1}{2} \sqrt{6625} \approx 40,697.$$