Fragen zur Vorlesung 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' vom 27.10.2020

Aufgabe L9

Beantworten Sie bitte folgende Fragen bis zum 30.10.2020 17:00 per E-Mail an rhschulz@zedat.fu-berlin.de

9a) (Skript 10.3/10.5)
Seien $V = K^3$ der $3-$dim $K-$Vektorraum mit geordneter kanonischer Basis $B = (e_1, e_2, e_3)$ und f_A die lineare Abbildung von V in sich (Endomorphismus), mit Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{(3,3)}.$$

Geben Sie bitte die Unterräume Kern f_A und Bild f_A an! (Bitte hier ohne Begründung!)
Lösungshinweis: Betrachten Sie bitte die $f_A(e_i)$ für $i = 1, 2, 3$.
Antwort:
Es gilt: Kern $f_A =< e_2, e_3 >$ und Bild $f_A =< e_2 >$.
Anmerkung:
1.) Nicht geforderte Begründung:
Laut Definition der durch eine Matrix definierten linearen Abbildung f_A gilt in diesem Fall

$$f_A(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$$
$$f_A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{o}$$
$$f_A(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{o}$$
.

Daraus folgt $f_A(< e_2, e_3 >) = \mathfrak{o} \neq f_A(< e_1 >)$ sowie
$f_A(V) = \{f_A(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) \mid \lambda_i \in K\} = \{\lambda_1 f_A(e_1) + \mathfrak{o} \mid \lambda_1 \in K\} =$
$\{\lambda_1 e_2 \mid \lambda_1 \in K\} =< e_2 >$.
2.) Leider haben einige TN*innen nicht berücksichtigt, dass bei der Definition von "Matrix mal Vektor" letzterer aus K^n (hier also $\mathbb{R}^3$) sein muss. e_1, e_2, e_3 sind Vektoren; daher ist $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ nicht in $\mathbb{R}^3$. Somit sind auf diesen Fehler aufbauende Rechnungen leider alle falsch.
Insgesamt ist einer der häufigste Fehler in der Schreibweise zu finden. Wenn da eine Menge einem Vektor gleichgesetzt wird, ist das schlicht falsch und meist kein Flüchtigkeitsfehler.

9b) (Skript 10.10-10.12)
Sei $(*)\quad Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit Matrix $A \in K^{(m,n)}$. Seien

• einerseits $L = p + L_0$ der Lösungsraum von $(*)$ mit Partikulärlösung p und Lösungsraum L_0 des zu $(*)$ gehörenden homogenen lineare Gleichungssystems und andererseits
• $f_A : K^n \to K^m$ mit $x \mapsto Ax$ lineare Abbildung mit Matrix A mit Kern Kern(f_A), Bild Bild(f_A) und $f_A^-(b)$ als vollem Urbild von b unter f_A.
Stellen Sie ohne Beweis den Zusammenhang her, indem Sie folgende Tabelle ergänzen:

Tabelle der Entsprechungen:

Zu $Ax = b$ gehörend	zu f_A gehörend
Lösbarkeit von $(*)$	b aus ...
L_0	
	$f_A^-(b)$,

Antwort:

Zu $Ax = b$ gehörend	zu f_A gehörend
Lösbarkeit von $(*)$	b aus Bild(f_A)
L_0	Kern (f_A)
L	$f_A^-(b)$,

*Anmerkung:*1.) Das LGS $(*)$ lässt sich schreiben als

$$f_A(x) = b.$$

Daraus ergeben sich die geforderten Antworten.
2.) Wieso "b aus ..." von so Vielen nicht ergänzt wurde, ist verwunderlich.