Fragen zur Vorlesung
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' vom 29.9.2020

Aufgabe L7

Beantworten Sie bitte folgende Fragen bis zum 2.10.2020 17:00 per E-Mail an rhschulz@zedat.fu-berlin.de

7a) (Skript Seite 111/112)

Sei V ein $K-$Vektorraum mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$; seien ferner $v = \sum_{i=1}^{3} b_i\lambda_i$ und $v = \sum_{i=1}^{3} b_i\mu_i$ Darstellungen eines Elementes $v \in V$. Laut Satz 7.7(d) sind die Darstellungen gleich , also $\lambda_i = \mu_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie dies analog zur Seite 112 durch Betrachtung von

$$v - v = \sum_{i=1}^{3} b_i\lambda_i - \sum_{i=1}^{3} b_i\mu_i.$$

Antwort:
Mittels Kommutativgesetz und Distributivgesetz ergibt sich

$$\mathfrak{o} = v - v = \sum_{i=1}^{3} b_i\lambda_i - \sum_{i=1}^{3} b_i\mu_i = \sum_{i=1}^{3} b_i(\lambda_i - \mu_i).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit[1] von B folgt $\lambda_i - \mu_i = 0$, also $\lambda_i = \mu_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

7b) (Skript Seite 102)

Laut Hilfssatz 8.6 (iii) hat ein Unterraum U eines $n-$dimensionalen Vektorraums V höchstens Dimension n. Zeigen Sie, dass eine Basis C von U linear unabhängig in V ist.
Anmerkung: Infolge der Übertragungs-Störung konnte ich HS 8.6 nicht mehr in der Vorlesung vom 29.9. behandeln. Da die Fragen aber aufgrund von Teilnehmer-Wünschen schon vor der Vorlesung veröffentlicht wurden und da man HS 8.6 eigentlich nicht dazu braucht, bleibt L7b) wie oben angegeben.

Antwort: Wäre C linear abhängig in V, so existierte eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors aus Vektoren von C in V; dies wäre aber auch eine nicht-triviale Linearkombination der Vektoren aus C in U, ein Widerspruch dazu, dass C Basis von U ist.
Anmerkung: Verweise auf 7.1b oder 7.3 waren bei den eingereichten Antworten nicht hilfreich, ebenfalls nicht die Anwendung von Hilfssatz 8.6, auf dessen Beweis sich die Frage bezog.

[1] diese war unbedingt zu erwähnen