

Fragen zur Vorlesung 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' vom 15.9.2020

Aufgabe L5

Beantworten Sie bitte folgende Fragen bis zum 18.9.20 17:00 per E-Mail an rhschulz@zedat.fu-berlin.de

5a) (laut Vorlesung)

Gegeben sei ein Integritätsbereich $(R, +, \cdot)$, also ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit mindestens 2 Elementen (s.Def.5.2).

Dann gilt für alle $a, d, c \in R$ die Kürzungsregel

$$ac = dc \Rightarrow a = d \vee c = 0.$$

Vervollständigen Sie bitte den folgenden Beweis dieser Regel:

$$ac = dc \Rightarrow ac - dc = 0 \Rightarrow (a - d)c = 0 \Rightarrow a = d \vee c = 0],$$

indem Sie die einzelnen Implikationen mit wenigen Stichworten begründen!

Antwort:

$$ac = dc \stackrel{\Rightarrow}{(1)} ac - dc = 0 \stackrel{\Rightarrow}{(2)} (a - d)c = 0 \stackrel{\Rightarrow}{(3)} a = d \vee c = 0$$

Implikation (1): Existenz der additiven Inversen $-dc$ von dc ; Addition von $-dc$ auf beiden Seiten und Definition der Inversen ($dc - dc = 0$)

Implikation (2): Anwendung des Distributivgesetzes

Implikation (3): Aus der Nullteilerfreiheit mit $c \neq 0$ folgt $a - d = 0$.

5b) (5.1 und 5.3)

Jeder "Körper" ist auch ein "Ring". Welche Eigenschaften werden von uns per definitionem beim Körper zusätzlich zu den Ringeigenschaften gefordert?

Anmerkung 1: Die Antwort multiplikative "Gruppe" statt "Halbgruppe" ist mir hier zu pauschal und nicht ganz "zusätzlich".

Antwort:

Zusätzlich wird gefordert:

- die Existenz eines neutralen Elementes der Multiplikation
- für jedes Element die Existenz einer multiplikativen Inversen
- die Kommutativität der Multiplikation

Anmerkung 2: Wieder schreiben einige TN*innen: "Es soll eine multiplikative Inverse existieren." Nein: Nicht eine, sondern für jedes Element der Gruppe eine. Falls das gemeint war, ist die Antwort falsch formuliert worden.

Anmerkung 3: Die Definitionen von Ring und Körper sind ganz abstrakt; die reellen Zahlen dienen nur als Beispiel und sind nicht allgemein Elemente dieser Strukturen oder implizieren die Verknüpfungen. Nach Beispielen war nicht gefragt.

Anmerkung 4: (K^*, \cdot) muss beim Körper eine Gruppe sein, nicht (K, \cdot) .