

Fragen zur Vorlesung 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' vom 8.9.2020

Aufgabe L4

Beantworten Sie bitte folgende Fragen bis zum 11.9.20 17:00 per E-Mail an
rhschulz@zedat.fu-berlin.de

4a) (Skript S.77)

Bei Aufgabe 3.2 c) heißt es: \mathcal{D}_5 (die Gruppe der Symmetrieabbildungen "des" regelmäßigen 5-Ecks) enthält genau eine Untergruppe der Elementanzahl (Ordnung) 5

Beschreiben Sie bitte kurz (ohne Beweis), welche Elemente die Untergruppe der Ordnung 5 enthält.

Antwort:

\mathcal{D}_5 enthält die Drehungen um $k \cdot 72^\circ$ um den Mittelpunkt des 5-Ecks (für $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$).

Anmerkungen:

1.) Viele TN*innen haben die 5 Spiegelungen als fragliche Teilmenge genommen; diese ist aber nicht abgeschlossen bzgl. Hintereinanderausführung: Das Produkt zweier Spiegelungen mit sich schneidenden Achsen ist nämlich eine Drehung.

2.) Einige TN*innen haben leider nicht zwischen den Deckabbildungen und den durch sie induzierten Permutationen der 5 Ecken unterschieden! Man erhält zwar isomorphe Gruppen, aber die Elemente sind verschieden.

4b) (Skript S.83)

In Hilfssatz 4.6 heißt es: Seien (G, \cdot) und (G', \cdot') Gruppen und $f : G \rightarrow G'$ Homomorphismus. Dann gilt für jedes $a \in G$: Das volle Urbild von $f(a)$ ist gleich $a \cdot \text{Kern } f$

Zeigen Sie hier bitte nur eine Richtung der Aussage durch Berechnung von $f(a \cdot \text{Kern } f)$.

Antwort:

Es gilt:

$$f(a \cdot \text{Kern } f) \stackrel{f}{=} f(a) \cdot' f(\text{Kern } f) \stackrel{\text{Def. Kern}}{=} f(a) \cdot \{e'\} \stackrel{\text{Def. } e'}{=} \{f(a)\}.$$

Also ist $a \cdot \text{Kern } f$ enthalten im Urbild von $f(a)$.

Anmerkungen:

Die Gleichheit von $a \cdot \text{Kern } f$ und vollem Urbild ist damit noch nicht gezeigt.

Beachten Sie bitte, dass $a \cdot \text{Kern } f$ eine Menge von Elementen (in Komplexschreibweise) ist, sodass das Ergebnis nicht $f(a)$, sondern $\{f(a)\}$ ist.