Fragen zur Vorlesung 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' vom 17.11.2020

Aufgabe L12(9.4 & 14.2)
Beantworten Sie bitte folgende Fragen bis zum 20.11.2020 17:00 per E-Mail an rhschulz@zedat.fu-berlin.de

Im affinen Raum AG($\mathbb{R}^3$) seien $g = \vec{a} + \vec{p}\,\mathbb{R}$ eine Gerade und $E = \vec{b} + \vec{q}\,\mathbb{R} + \vec{r}\,\mathbb{R}$ eine Ebene mit $g \parallel E$.
Sei ferner F mit $F(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{t}$ eine affin-lineare Abbildung von AG($\mathbb{R}^3$) in sich (mit $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$)!

(i) Was bedeutet $g \parallel E$ für $\vec{p}$ und $\vec{q}\,\mathbb{R} + \vec{r}\,\mathbb{R}$?

(ii) Berechnen Sie bitte $F(g)$ und $F(E)$.

(iii) Sind $F(g)$ und $F(E)$ ebenfalls parallel?

Antwort:

(i) Es ist $g \parallel E$ gdw. $\vec{p} \in \vec{q}\,\mathbb{R} + \vec{r}\,\mathbb{R}$ (vgl. mit Def. 9.4).

(ii) $F(g) = F(\vec{a} + \vec{p}\,\mathbb{R}) = A(\vec{a} + \vec{p}\,\mathbb{R}) + \vec{t} = A\vec{a} + A\vec{p}\,\mathbb{R} + \vec{t} = (A\vec{p})\mathbb{R} + (A\vec{a} + \vec{t})$
und
$F(E) = F(\vec{b} + \vec{q}\,\mathbb{R} + \vec{r}\,\mathbb{R}) = A(\vec{b} + \vec{t} + \vec{q}\,\mathbb{R} + \vec{r}\,\mathbb{R}) + \vec{t} = A\vec{b} + (A\vec{q})\,\mathbb{R} + (A\vec{r})\,\mathbb{R}$.

(iii) Ist $\vec{p} \in \vec{q}\,\mathbb{R} + \vec{r}\,\mathbb{R}$, so auch $A\vec{p} \in A\vec{q}\,\mathbb{R} + A\vec{r}\,\mathbb{R}$, also $F(g) \parallel F(E)$.

Anmerkungen (wegen Häufigkeit derselben Fehler nicht individuell angemerkt) :

- Bei der Beantwortung der Fragen (i) und (iii) spielen die Stützvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und der Translationsvektor $\vec{t}$ keine Rolle.
- $\vec{p} = \vec{q}\,R + \vec{r}\,R$ ist nicht richtig; denn falls $\mathbb{R}$ gemein ist, steht links ein Vektor und rechts eine Menge von Vektoren. Und wenn $R \in \mathbb{R}$ gemeint ist, darf nicht der gleiche Skalar genommen werden.
- Viele TN*innen argumentieren beim Beweis (iii) der Parallelität, dass bei F affine Räume auf parallele abgebildet werden bzw. " alle Punkte in die selbe Richtung und auf der gleichen Strecke verschoben werden" bzw. "Richtungsvektoren ändern sich nicht". Aber F ist (im Falle $A \neq E_2$) i.A. keine Translation.
- "Die Abbildungen sind weiterhin parallel" ist nicht sinnvoll, da Parallelität von Abbildungen nicht definiert ist. Auch dass Punkte die gleiche Richtung haben, ist falsch.
- Man beachte, dass $F(g)$ nicht unbedingt eine Gerade und $F(E)$ nicht unbedingt eine Ebene ist, wenn A nicht regulär ist.
- Vielen Dank auch für die guten Wünsche, die ich gern erwidere.