Fragen zur Vorlesung
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I' vom 3.11.2020

Aufgabe L10

Beantworten Sie bitte folgende Fragen bis zum 6.11.2020 17:00 per E-Mail an
rhschulz@zedat.fu-berlin.de

10a) (Skript 11.2, 11.5.)
Sei $(*)\quad Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über dem Körper K mit Koeffizientenmatrix [1]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welchen Rang hat A, und welche Dimension hat der Lösungsraum L des LGS $(*)$?
Antwort:
Rang $A = 3$, da die 3 Spalten von A lineare unabhängig sind.
$\dim_K L = 3 -$ Rang $A = 0$ (lt. Formel aus 1.5).
Anmerkung: Das heißt, dass $(*)$ eine eindeutige Lösung hat.

10b) (Skript 13.2)
Sei V ein $2-\dim\mathbb{R}-$Vektorraum mit Basis (b_1, b_2). Begründen Sie ohne Verwendung von Koordinatenvektoren, dass es einen Endomorphismus $f : V \to V$ gibt mit

$$\mathrm{Kern} f = b_1\mathbb{R} = \mathrm{Bild} f.$$

Antwort: Nach dem Satz über die lineare Fortsetzung existiert eine lineare Abbildung f von V in V (also ein Endomorphismus von V) mit

$$f(b_1) = \mathfrak{o} \quad \text{und} \quad f(b_2) = b_1.$$

Wegen der Linearität von f gilt

$(**)\ f(b_1\mathbb{R}) = \{\mathfrak{o}\},$ also $b_1\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Kern} f$ und $f(b_2\mathbb{R}) = b_1\mathbb{R},$ also $b_1\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Bild} f.$

Da Kern f und Bild f von V verschiedene Unterräume sind, gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}\ \mathrm{Kern} f = 1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Bild} f$$

und damit die Gleichheit in $(**)$.

[1] Hierbei ist $*$ jeweils Platzhalter für ein Element von K, nicht unbedingt für dasselbe Element.