1. Übung zur Algebra und Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrer

Dozent: V.Schulze

Aufgabe 1

Sei die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gegeben und auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen eine Relation $\sim$ definiert durch

$$a \sim b :\Leftrightarrow n|(a-b) \qquad \text{(d.h. n ist Teiler von a-b).}$$

Man schreibt für $a \sim b$ auch $a \equiv b(modn)$.
Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2

(i) Sei $a \in \mathbb{N}$ und $[a]$ die von a erzeugte Äquivalenzklasse bez. $\sim$ aus Aufgabe 1.
Welche Elemente enthält $[a]$?
(ii) Man gebe alle Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim$ an.

Aufgabe 3

Auf der Menge $H = \{e, a\}$ sei eine Verknüpfung $\circ$ definiert durch
$e \circ e = e$, $e \circ a = a$, $a \circ e = e$, $a \circ a = a$.
(i) Man zeige, daß $(H, \circ)$ eine Halbgruppe ist.
Anmerkung: e ist linksneutrales Element der Halbgruppe
und jedes Element aus H besitzt ein rechtsinverses Element.
(ii) Ist $(H, \circ)$ eine Gruppe ?

Aufgabe 4

Betrachte die die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix},$$

$$\phi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix}.$$

Berechne $\phi \circ \pi, \pi \circ \phi, \pi^{-1}$.