Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra I'

Aufgabe D10 (Lineare Abbildung, Kern, Dimensionssatz)
Sei $H \in \mathbb{F}_2^{(3,7)}$ die folgende Matrix mit Einträgen aus $\mathrm{GF}(2) = \mathbb{F}_2$:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung

$$S_H : \mathbb{F}_2^7 \to \mathbb{F}_2^{(3,1)} \text{ mit } x \mapsto H \cdot x^T$$

heisst dann Syndrom-Abbildung. Die Elemente von $\mathcal{C} := \text{Kern } S_H$ nennen wir Codewörter aus $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ selbst einen $(7,4)-$Hammingcode.
(a) Bestimmen Sie $|\mathcal{C}|$, also die Anzahl der Codewörter, unter Verwendung der Formel $\dim_K V = \dim_K \text{Kern } f + \dim_K \text{Bild } f$ für $f \in \text{Hom }_K(V,W)$ und V, W endlich-dimensional.
(b) Sei $y = c + e$ ein durch den Fehler e aus c verfälschtes Wort. Bestimmen Sie $S_H(y)$ in Abhängigkeit von e (und H) !
(c) Bestimmen Sie $S_H(y)$, falls $e = e_i$, der i-te Einheitsvektor ist!
(d) Korrigieren Sie das Wort $y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zum Codewort c, wenn e einer der Einheitsvektoren ist!

Lösungsskizze:

(a) Da S_H linear ist und H Rang 3 hat, gilt (für die Dimensionen über $\mathbb{F}_2$):

$$\dim \mathcal{C} = \dim \text{Kern } S_H = \dim \mathbb{F}_2^7 - \dim \text{Bild } S_H = 7 - 3 = 4$$

(daher (7,4)-Hammingcode). Es folgt $|\mathcal{C}| = 2^4 = 16$.

(b) Wegen der Linearität von S_H und $\mathcal{C} = \text{Kern } S_H$ erhält man
$S_H(y) = S_H(c+e) = S_H(c) + S_H(e) = 0 + S_H(e) = H \cdot e^T$.

(c) U.a. wegen (b) ist $S_H(y) = H \cdot e_i^T$, also die i-te Spalte von H, und hier sogar (wegen der speziellen Form von H) gleich der Nummer der Fehlerstelle in Binärdarstellung.

(d) Das Syndrom von y_1 ist definitionsgemäß gleich

$$H \cdot y_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also gleich der $6-$ten Spalte von H. Da nach Voraussetzung nur ein Fehler in einer Komponente vorliegt, ist $e = e_6$ und

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$