Satz 6

$T(a)$ und $T(b)$ seien Teilermengen der nat. Zahlen a und b. Dann gilt:

$$T(a) \subseteq T(b) \iff a \mid b$$

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $T(a) \subseteq T(b)$.

$$a \in T(a) \Rightarrow a \in T(b) \Rightarrow a \mid b.$$

„$\Leftarrow$" Es gelte $a \mid b$.

Sei $c \in T(a)$ bel. gewählt.

$$c \in T(a) \Rightarrow c \mid a \underset{\substack{\text{Transitivität} \\ c \mid a \,\wedge\, a \mid b}}{\Rightarrow} c \mid b \Rightarrow c \in T(b)$$

c war beliebig gewählt, also gilt dies f.a. $c \in T(a)$, also gilt $T(a) \subseteq T(b)$.

$\square$

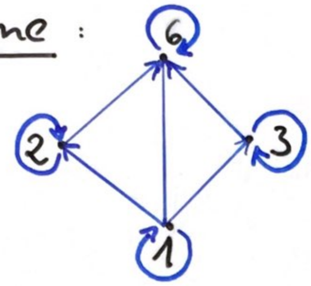
Anmerkung:

Satz 6 liefert einen Zusammenhang zwischen Zahlentheorie und Mengenalgebra.

Veranschaulichung von (zweistelligen) Relationen auf endlichen Mengen

Pfeildiagramme:

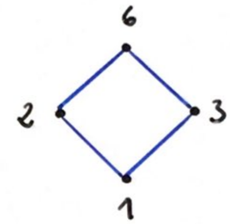
Beispiel:



$T(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

Vereinfachung bei Ordnungsrelationen:

Verzicht auf
- Ringpfeile
- Überbrückungspfeile
- Pfeilspitzen

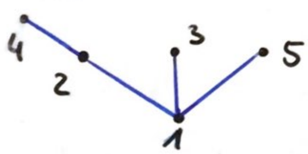


Solch vereinfachte Pfeildiagramme nennt man

Hassediagramme.

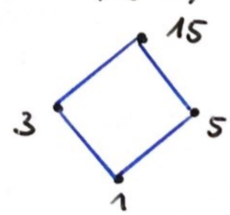
Beispiele:

$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

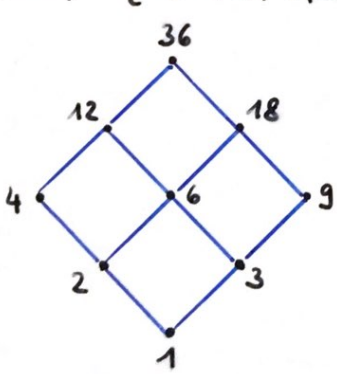


$T(8) = T(2^3)$

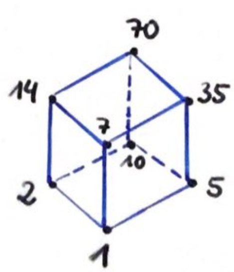
$T(15)$



$T(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$



$T(70) = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$



5. Primzahlen

... besitzen verschiedene „Gesichter".

⇝ unterschiedliche Wege zur Einführung in der Schule möglich.

Weg 1:

Michael besitzt verschiedene Vervielfachungsmaschinen

$\boxed{\cdot 2}$ $\boxed{\cdot 3}$ $\boxed{\cdot 4}$ ...

Auftrag: 100 große Zahlen versechsfachen.

Aber: $\boxed{\cdot 6}$ defekt

Idee: $\boxed{\cdot 2}$ und $\boxed{\cdot 3}$ verwenden!

Weitere Idee: Rationalisierung!

⇝ Nur die unentbehrlichen Maschinen behalten!

Weg 2:

Es war einmal ein Tyrann ...

Gefängnis mit 1000 Einzelzellen und 1000 Wärtern
Jährlich werden Gefangene freigelassen.

Auswahl (nach folgender) Methode:

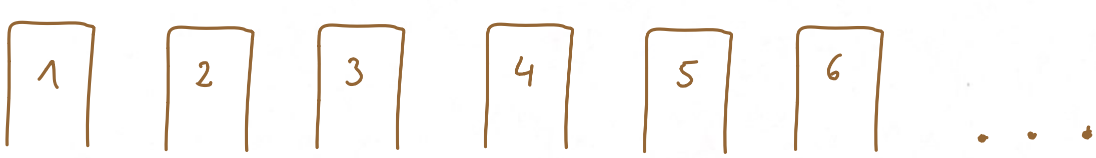
1000 Wärter gehen an 1000 Türen vorbei:

1. Wärter: Kreuz auf jede Tür
2. Wärter: " " " 2. Tür.
3. Wärter: " " " 3. Tür

⋮

Alle Gefangenen, die genau zwei Kreuze erhalten haben, werden freigelassen.

Welche Zellentüren werden geöffnet?



Weg 3

Vor uns liegen 12 gleich große, quadratische Plättchen.

Fragen:
- Wie viele verschiedene Rechtecke können wir mit diesen Plättchen legen?
- Wie viele mit 13, 15, 20 Plättchen?
- Gibt es auch Plättchenmengen, aus denen wir kein Rechteck (mit mehr als einer Zeile) bilden können?

Unterschiedliche „Gesichter" der Primzahlen:

- Primzahlen sind unzerlegbar.
- Primzahlen sind Bausteine der natürl. Zahlen.
- Primzahlen besitzen genau zwei Teiler.

Def. 1

Natürliche Zahlen, die genau zwei Teiler besitzen, nennen wir Primzahlen.

Def. 2

Natürliche Zahlen, die mindestens drei Teiler besitzen, nennen wir zusammengesetzte Zahlen.

Bemerkung:

Betrachte die „Unzerlegbarkeit" natürl. Zahlen bzgl.

- Addition: Es ex. nur die „1" als unzerlegbares Element in $\mathbb{N}$. Aus der „1" lassen sich additiv alle Elemente von $\mathbb{N}$ erhalten.

- Multiplikation: Es ex. unendlich viele unzerlegbare Elemente in $\mathbb{N}$, die Primzahlen. Aus diesen lassen sich alle Elemente von $\mathbb{N}$ multiplikativ erhalten.

  (Dies ist eine Behauptung, die noch bewiesen werden wird.)

Wie viele Primzahlen gibt es?

Einige Überlegungen vorab:

> **Satz 1:**
> Der kleinste von 1 verschiedene Teiler einer natürlichen Zahl $a > 1$ ist stets eine Primzahl.

Beweis:

1. Fall: a ist Primzahl.

$T(a) = \{1, a\}$, also ist der kleinste von 1 versch. Teiler a selbst und a ist Primzahl.

2. Fall: $a \neq 1$ ist keine Primzahl.

a besitzt also mind. 3 versch. Teiler 1, a und b mit $b \neq 1$ und $b \neq a$.

Für b gilt $1 < b < a$. Dies gilt f.a. nicht-triv. Teiler von a. Also ex. ein kleinster Teiler t $(t \neq 1)$ (dieser ex. wegen des Wohlordnungsprinzips in $\mathbb{N}$).

Behauptung: t ist Primzahl.

Ann.: t ist keine Primzahl. Dann besitzt t mind. 3 Teiler $1, t_1, t$ mit $1 < t_1 < t$. |79

Dann gilt: $t_1 | t \wedge t | a \Rightarrow t_1 | a \Rightarrow$ t war nicht der kleinste nicht-triv. Teiler von a. $\Rightarrow$ Ann. falsch $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Berechung:

Natürl. Zahlen	1 – 10	1 – 100	1 – 1000	1 – 10.000	1 – 100.000	1 – 1 Mio
Primzahlanteile (in %)	40	25	16,8	12,3	9,6	7,8

Beobachtung: Primzahlen werden seltener.

Frage: Hören sie ganz auf?

> **Satz 2** (Satz von Euklid, vor ca. 2300 J.)
> Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis

Ann.: Es gibt nur endl. viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$.

$$a := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \qquad (a > 1)$$

$p_i \nmid a$ f.a. $i = 1, \dots, n$ (da $a \equiv 1 \pmod{p_i}$)

Wegen Satz 1 ist der kleinste Teiler $t \neq 1$ von a stets eine Primzahl. Diese ist, da sie a teilt, von den n Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ verschieden.

Also ex. mind. eine weitere Primzahl (nämlich t).

Widerspruch zur Ann. $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Unmittelbare Folgerung aus Satz 2:

Zu jeder noch so großen Primzahl gibt es stets eine weitere Primzahl, die größer ist.

Daher gibt es keine größte Primzahl.

Bemerkung:

Der Beweis von Satz 2 ist konstruktiv.

Man kann Primzahlen konstruieren, aber nicht jede so konstruierte Zahl ist eine Primzahl.

$2 \cdot 3 + 1$	$= 7$	7 neue Primzahl
$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$	$= 31$	31 " "
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$	$= 211$	211 " "
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$	$= 2311$	2311 " "

ABER: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031 = 59 \cdot 509$

neue Primzahl

⇨ Es entwickelte sich eine Jagd nach Primzahlrekorden.

Informationen findet man z.B. hier:

- http://primes.utm.edu (25.10.2011)
- GIMPS-Projekt (Great Internet Mersenne Prime Search)
  www.mersenne.org/prime.htm
  (Mersenne-Primzahlen: von der Form $2^n - 1$)

Beispiele zur Primzahlrekordentwicklung

Zahl	Ziffern (Anzahl)	Entdeckung (Jahr)
$2^{17}-1$ (= 131.071)	6	1588
$2^{19}-1$ (= 524.287)	6	1588
$2^{31}-1$ (= 2.147.483.647)	10	1772 (Euler)
$2^{127}-1$	39	1876 (Lucas)
$(2^{148}+1):17$	44	1951
$2^{521}-1$	157	1952
$2^{4.423}-1$	1332	1961
$2^{216.091}-1$	65.050	1985
$2^{13.466.917}-1$	4.053.946	2001
$2^{32.582.657}-1$	9.808.358	2006
$2^{43.112.609}-1$	12.978.189	25.10.2011 abgelesen

Ziffern

$2^{74.207.281} - 1$ 22 338 618 7. Jan. 2016

von Cooper, Woltman, Kurowski,
Bosser & GIMPS

(abgelesen am 11.10.2017 auf
https://primes.utm.edu/largest.html)

$2^{77\,232\,917} - 1$ 23 249 425 26.12.2017

von Jon Pace (GIMS)

(abgelesen am 15.10.2018 auf
https://www.mersenne.org/primes)

Das Sieb des Eratosthenes
(ca. 284 - 200 v. Chr.)

(Ein Verfahren Primzahlen bis zu einer natürlichen Zahl n zu bestimmen.)

Beispiel: $n = 31$

1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	
26	27	28	29	30	31	

1) Streiche „1" (keine Primzahl)
2) „2" ist Primzahl; streiche alle Vielfachen.
3) „3" " " " " "
4) „5" " " " " "
5) Alle weiteren verbliebenen Zahlen bis 31 sind Primzahlen.
(Alle Vielfachen der 7/11/13/... sind bereits gestrichen!)

Das Sieb des Eratosthenes

(ca. 284 - 200 v. Chr.)

(Ein Verfahren Primzahlen bis zu einer natürlichen Zahl n zu bestimmen.)

Beispiel: $n = 31$

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7
	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13
	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~
	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31

1) Streiche „1" (keine Primzahl)
2) „2" ist Primzahl; streiche alle Vielfachen.
3) „3" " " " " "
4) „5" " " " " "
5) Alle weiteren verbliebenen Zahlen bis 31 sind Primzahlen.
(Alle Vielfachen der 7/11/13/... sind bereits gestrichen!)

Satz 3

Alle Primzahlen größer als 3 sind Vorgänger oder Nachfolger der Vielfachen von 6, sind also darstellbar in der Form $6 \cdot n - 1$ oder $6 \cdot n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Satz 3 ergibt sich aus der Anordnung der Zahlen und dem Siebverfahren beim Sieb des Eratosthenes.

Bemerkungen:

1) Die Umkehrung von Satz 3 gilt nicht.
Gegenbeispiel: $25 = 6 \cdot 4 + 1$.

2) Mit Hilfe von Satz 3 lassen sich die Primzahlen zwischen 1 und 100 schnell bestimmen.
Bei vielen zusammengesetzten Zahlen der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$ sieht man sehr schnell, dass sie keine Primzahlen sind (z.B. bei 25, 35 oder 49); nur bei $91 = 6 \cdot 15 + 1 = 7 \cdot 13$ muss man etwas mehr rechnen.