2. Ordnungsrelation

Def. Ordnungsrelation

Sei M eine Menge, ρ Relation auf M.
Dann heißt ρ Ordnungsrelation und (M, ρ) geordnete Menge (M bzgl. ρ geordnete Menge), wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(1) Reflexivität $\quad x \rho x$

(2) Antisymmetrie $\quad (x \rho y \wedge y \rho x) \Rightarrow x = y$

(3) Transitivität $\quad (x \rho y \wedge y \rho z) \Rightarrow x \rho z$

Anmerkung:
Manche Autoren sprechen von „teilweiser" Ordnung oder „Halbordnung".

Beispiele geordneter Mengen:

- $(\mathbb{R}, \leq)$
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$
- (M, id_M)

Bsp. $X = \{1,2\}$

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\{1,2\}$

$\{1\}$ $\quad$ $\{2\}$

$\emptyset$

Beispiel 1:

Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir die Relation $\leq_{\mathbb{Z}}$ durch

$$\boxed{r \leq_{\mathbb{Z}} s \;:\Longleftrightarrow\; \left(r = s \vee \left(\exists n \in \mathbb{N} : r + n = s\right)\right)}$$

„kleiner gleich auf $\mathbb{Z}$"

Die Eigenschaften (1) bis (3) sind nachprüfbar.

Zu (1) $r \leq r$ gilt für alle $r \in \mathbb{Z}$, da $r = r$.

Zu (2) Sei $r \leq s$ und $s \leq r$.
Ann. $r \neq s$.
Dann ex. wegen $r \leq s$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt $r + n = s$
und es " " $s \leq r$ " $m \in \mathbb{N}$, " " " $s + m = r$

$\Rightarrow \underbrace{s+m}_{=r} + n = s$ $\lightning$ (Wid., da $n, m \in \mathbb{N}$.)

Zu (3) Sei $r \leq s \wedge s \leq t$.

$r \leq s \Longleftrightarrow r = s \vee \exists n \in \mathbb{N} : r + n = s$

$s \leq t \Longleftrightarrow s = t \vee \exists m \in \mathbb{N} : s + m = t$

<u>1. Fall</u>: Es gilt $r = s \wedge s = t$. Dann folgt $r = t$, also $r \leq t$.

<u>2. Fall</u>: Es gilt $r = s \wedge \exists m \in \mathbb{N} : s + m = t$. Es folgt $r + m = t$, also $r \leq t$.

<u>3. Fall</u>: Es gilt $\exists n \in \mathbb{N} : r + n = s \wedge \exists m \in \mathbb{N} : s + m = t$. Dann folgt
$r + \underbrace{n+m}_{\in \mathbb{N}} = t$, also $r \leq t$.

<u>4. Fall</u>: Es gilt $s = t \wedge \exists n \in \mathbb{N} : r + n = s$. Analog zu 2. Fall. $\square$

Vorüberlegung zur Teilbarkeitsrelation

Einführung / Veranschaulichung der Teilbarkeitsrel. in der Schule durch Sachsituationen:

Beispiel:
Vor Anja liegen 20 Äpfel.
Ziel: Gleichmäßige Verteilung auf Netze.

Möglichkeiten:

10 10	$2 \cdot 10 = 20$
5 5 5 5	$4 \cdot 5 = 20$
4 4 4 4 4	$5 \cdot 4 = 20$
$\underbrace{2\ 2\ \ldots\ 2}_{10\times}$	$10 \cdot 2 = 20$
$\underbrace{1\ 1\ \ldots\ 1}_{20\times}$	$20 \cdot 1 = 20$

Es geht nicht, 20 Äpfel auf 6 Netze zu verteilen, denn es bleiben 2 Äpfel übrig.

Grundvorstellung: „Aufteilen"

Bestimmung der Verpackungsmöglichkeiten mithilfe der Multiplikation:

Beispiel:
20 Äpfel können genau dann restlos zu je 4 in Netze verpackt werden, wenn es eine natürliche Zahl q gibt mit $q \cdot 4 = 20$.

Beispiel 2: „**Teilbarkeitsrelation**"

Auf $\mathbb{N}$ definieren wir die Relation „|" durch

$$\boxed{(n \mid m :\Longleftrightarrow \exists\, b \in \mathbb{N} : n \cdot b = m) \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}}$$

Sie ist die (Ordnungs-) Relation „ist Teiler von" auf $\mathbb{N}$.

zu (1) $n \mid n$, da $n \cdot 1 = n$ mit $1 \in \mathbb{N}$

zu (2) $(n \mid m \wedge m \mid n) \Rightarrow \exists\, b_1, b_2 \in \mathbb{N}: \begin{array}{r} n \cdot b_1 = m \\ m \cdot b_2 = n \\ \hline n \cdot b_1 + m \cdot b_2 = m + n \end{array} \Big| +$

$\Rightarrow b_1 = b_2 = 1 \Rightarrow m = n$

zu (3) $n \mid m \wedge m \mid k \Rightarrow \exists\, b_1, b_2 \in \mathbb{N} : n \cdot b_1 = m \wedge m \cdot b_2 = k$

$\Rightarrow n \cdot \underbrace{b_1 \cdot b_2}_{=: r \in \mathbb{N}} = k$

$\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N} : n \cdot r = k$

$\Rightarrow n \mid k.$

$\square$

Anmerkung:

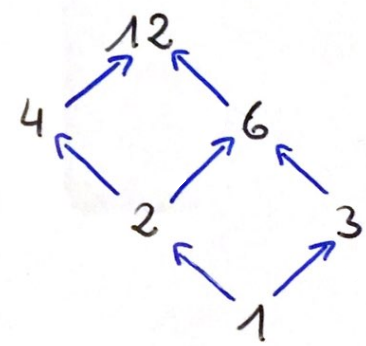
Ist $(M, \preceq)$ geordnete Menge, so heißt das nicht, dass zwei Elemente $x, y \in M$ „vergleichbar" sind, dass also $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt.

Beispiel:

In $(T_{12}, |)$ sind z.B. 4 und 6 nicht vergleichbar.

Pfeildiagramm

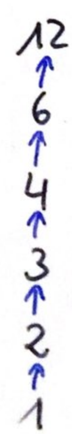
$(T_{12}, |)$



ABER: In $(T_{12}, \leq)$ sind je zwei Elemente vergleichbar (wobei $\leq$ die Relation ist, die von $(\mathbb{N}, \leq)$ in T_{12} induziert wird).

Pfeildiagramm

$(T_{12}, \leq)$



Def.

Eine Menge M heißt **total geordnet** (**linear geordnet**) und $\preccurlyeq$ totale Ordnungsrelation, wenn gilt:

(1) $(M, \preccurlyeq)$ ist geordnete Menge

(2) $\forall x, y \in M: \ (x \preccurlyeq y \ \vee \ y \preccurlyeq x)$

Beispiele:

- $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist total geordnet.
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ist nicht total geordnet, wenn X mindestens 2 versch. Elemente enthält.

  Bsp. $X = \{1,2\} \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

  Pfeildiagramm:

$$\begin{tikzcd} & \{1,2\} & \\ \{1\} \arrow[ur] & & \{2\} \arrow[ul] \\ & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- $(T_n, |)$ ist nur total geordnet, wenn $n = p^s$ und p Primzahl ($s \in \mathbb{N}$) ist.

  Bsp. $T_{24} = T_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

  Pfeildiagramm:

$$\begin{tikzcd} 16 \\ 8 \arrow[u] \\ 4 \arrow[u] \\ 2 \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

<u>Bemerkung:</u>

Abbildungen (Funktionen) stellen eine weitere Art von Relationen dar, die spezielle Eigenschaften besitzen, aber im Allgemeinen weder eine Ordnungs- noch eine Äquivalenzrel. sind.

Zunächst widmen wir unsere Aufmerksamkeit der Teilbarkeitsrelation.

Der nun folgende Abschnitt (ebenso wie die Vorüberlegung zur Teilbarkeitsrelation) sind im Wesentlichen dem Buch von F. Padberg „Elementare Zahlentheorie" entnommen.

Zur leichteren Vergleichbarkeit wird die Nummerierung der Definitionen und Sätze ebenfalls im Wesentlichen übernommen.

4. Die Teilbarkeitsrelation

Def 1: Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$

Die natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ ist genau dann „Teiler von" der natürlichen Zahl $b \in \mathbb{N}$, wenn (mind.) eine natürliche Zahl $q \in \mathbb{N}$ existiert, mit

$$q \cdot a = b.$$

Kurz:

$$\boxed{a \mid b \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, q \in \mathbb{N} : q \cdot a = b}$$

Beispiele:

$4 \mid 12$, denn $3 \cdot 4 = 12$

$8 \mid 56$, denn $7 \cdot 8 = 56$

$7 \nmid 50$, denn $7 \cdot 7 = 49 \wedge 8 \cdot 7 = 56$

„teilt nicht" $\quad 49 < 50 < 56$

Bemerkungen:

1) Bei der Betrachtung von $\mathbb{N}_0$ kommen drei einfache Typen von Teilbarkeitsaussagen hinzu:

i) $0 \nmid b$ f.a. $b \in \mathbb{N}$, denn $q \cdot 0 = 0$ f.a. $q \in \mathbb{N}$

ii) $a \mid 0$ f.a. $a \in \mathbb{N}$, denn $0 \cdot a = 0$ f.a. $a \in \mathbb{N}$

iii) $0 \mid 0$, denn $q \cdot 0 = 0$ für z.B. $q = 1$.

2) Es gilt $0 \mid 0$, denn es ex. eine nat. Zahl q mit $q \cdot 0 = 0$.

<u>Genauer</u>: Dies gilt für alle natürlichen Zahlen.
Dies ist unproblematisch bei der Teilbarkeit, aber sehr problematisch bei der Division, denn wegen des Verstoßes gegen die Eindeutigkeit ist <u>$0 : 0$ nicht definiert</u>.

3) <u>In Def. 1</u>: Rückgriff auf Multiplikation nicht auf die Division.

<u>Vorteile</u>:

- beim Beweisen von Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation.
- sichtbarer Zusammenhang von Teilern und Vielfachen.
- Vermeidung von Problemen bei $0 \mid 0$.

4) Beim Dividieren zweier Zahlen können von null verschiedene Reste auftreten, beim Teilen (im Sinne von Def. 1) nicht. Das Teilen ist daher ein <u>Spezialfall</u> des Dividierens!

<u>Zielsetzungen verschieden:</u>

<u>Teilen</u>: Frage, <u>ob</u> eine Zahl in einer zweiten enthalten ist.

<u>Dividieren</u>: Frage, <u>ob</u> und zusätzlich <u>wie oft</u> der Divisor im Dividenden enthalten ist.

<u>Bemerkung</u>:

Wegen der Kommutativität der Mult. in $\mathbb{N}$ gilt:

$$q \cdot a = a \cdot q = b \quad \text{und somit } q \mid b.$$

a und q nennen wir <u>komplementäre Teiler</u> (bzgl. b).

Betrachte: Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$.

Def. 1a: Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$.

$a \in \mathbb{Z}$ ist genau dann Teiler von $b \in \mathbb{Z}$, wenn (mind.) ein $q \in \mathbb{Z}$ ex. mit $q \cdot a = b$.

Def. 2:

$b \in \mathbb{N}$ ist genau dann ein Vielfaches von $a \in \mathbb{N}$, wenn (mind.) ein $q \in \mathbb{N}$ existiert, mit $q \cdot a = b$.

Kurz: $a \mid b$ „b ist Vielfaches von a"

Zusammenhang von Teilbarkeits- und Vielfachenrelation (Def. 1 und 2):

a ist Teiler von b

$\Longleftrightarrow$

b ist Vielfaches von a

Eigenschaften

Wir haben bereits gezeigt, dass die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ eine Ordnungsrelation ist. Für die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{Z}$ gilt dies nicht.

Reflexivität und Transitivität können analog zum Vorgehen in $\mathbb{N}$ gezeigt werden.

Antisymmetrie gilt dagegen nicht.

Es kann „nur noch" gezeigt werden:

Satz 1: Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt:

$$a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow |a| = |b|$$

Def. Absolutbetrag

Wir definieren $|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$

„Betrag von a"

(„Abstand zur 0" ; stets nicht-negativ)

Beweis zu Satz 1:

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a | b$ und $b | a$.

$$a | b \wedge b | a \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z} : q_1 \cdot a = b \wedge q_2 \cdot b = a$$

$$\underset{\text{Einsetzen}}{\Rightarrow} q_1 (q_2 b) = b \quad \underset{\text{Assoziativgesetz in } \mathbb{Z}}{\Rightarrow} (q_1 q_2) b = b$$

1. Fall: $b \neq 0$.

Dann folgt: $q_1 q_2 = 1$.

$$q_1 q_2 = 1 \Rightarrow (q_1 = 1 \wedge q_2 = 1) \vee (q_1 = -1 \wedge q_2 = -1)$$

$$\Rightarrow a = b \vee a = -b \vee -a = b$$

$$\Rightarrow |a| = |b|$$

2. Fall: $b = 0$:

Dann gilt $a | 0$ und $0 | a$.

$$\Rightarrow 0 = a$$

$$\underset{b=0}{\Rightarrow} a = b = 0$$

$$\Rightarrow |a| = |b|.$$

$\square$

Satz 2

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z} : (a | b \wedge c | d) \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d$$

Beweis:

$$a | b \wedge c | d \Rightarrow \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z} : q_1 a = b \wedge q_2 c = d$$

Also: $(q_1 \cdot a) \cdot (q_2 \cdot c) = b \cdot d$

$\Longrightarrow \quad (q_1 q_2) \cdot (a c) = b \cdot d$

Assoz. u. Kommut. der Mult. in $\mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \quad \exists q_3 \in \mathbb{Z} : \quad q_3 (a \cdot c) = b \cdot d \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot d.$

$\underbrace{q_1 \cdot q_2}_{=: q_3} \in \mathbb{Z}$

$\square$

Bemerkung:

Satz 2 ist nicht umkehrbar.

Gegenbeispiel: $2 \cdot 3 \mid 5 \cdot 6$

aber es gilt weder ($2|5$ und $3|6$)

noch ($2|6$ und $3|5$)

Satz 2a (Spezialfall von Satz 2)

Für alle $d \in \mathbb{Z}$ gilt:

(1) Aus $a \mid b$ folgt $a \mid d \cdot b$

(2) Aus $a \mid b$ folgt $d \cdot a \mid d \cdot b$

Beweis:

(1) folgt mit $c = 1$ und $1 \mid d$ f.a. $d \in \mathbb{Z}$ aus Satz 2 als Spezialfall

(2) folgt wegen $d \mid d$ f.a. $d \in \mathbb{Z}$ aus Satz 2

$\square$

Bemerkung: Bezüglich der Addition gibt es kein Analogon zu Satz 2, wie folgendes Beispiel zeigt.

$$2 \mid 4 \wedge 3 \mid 9 \quad \text{aber} \quad 2+3 \nmid 4+9$$

$$5 \nmid 13$$

Satz 4

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}: \quad a \mid b \iff |a| \mid |b|$$

Beweis: 1) $a \mid b \Rightarrow |a| \mid |b|$

2) $|a| \mid |b| \Rightarrow a \mid b$ folgt direkt mit den Definitionen.

Satz 3

$$\forall a,b,c,r,s \in \mathbb{Z} : (a|b \wedge a|c) \Rightarrow (a \mid r\cdot b + s\cdot c)$$

Beweis:

$a|b \wedge a|c$ gilt nach Voraussetzung.

Nach Satz 2a (1) ex. $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$\left.\begin{aligned} q_1 \cdot a &= r\cdot b \\ q_2 \cdot a &= s\cdot c \end{aligned}\right| +$$

Also gilt: $q_1 a + q_2 a = rb + sc$

$$\underset{\substack{\text{Distributivgesetz} \\ \text{in } \mathbb{Z}}}{\Longrightarrow} (q_1 + q_2)a = rb + sc \Rightarrow a \mid rb + sc$$

$\square$

Bemerkung: Satz 3 ist nicht umkehrbar.

Gegenbeispiel: $2 \mid (2\cdot 3 + 4\cdot 5)$ aber $2 \nmid 3$ und $2 \nmid 5$.

Satz 3a (Spezialfall von Satz 3)

$$\forall a,b,c \in \mathbb{Z} : (a|b \wedge a|c) \Rightarrow (a \mid b+c \wedge a \mid b-c)$$

Beweis:

Satz 3a folgt nach Satz 3 mit $r = 1$ und $s = 1$ bzw. $r = 1$ und $s = -1$.

$\square$

Teilermengen

Def. 3

Die Menge aller positiven Teiler von $a \in \mathbb{N}$, d.h. die Menge $T(a) := \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid a\} = T_a$ nennen wir Teilermenge von a.

Beispiele:

$$T(17) = \{1, 17\} = T_{17}$$

$$T(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = T_{18}$$

$$T(19) = \{1, 19\} = T_{19}$$

Bemerkung:

Wegen $1 \mid a$ und $a \mid a$ f.a. $a \in \mathbb{N}$ gilt:

$T(a)$ besitzt für jede Zahl $a > 1$ die trivialen Teiler 1 und a als Elemente.

Nur 1 hat lediglich einen Teiler.

Wenn $T(p)$ genau die beiden trivialen Teiler enthält, ist p eine Primzahl.

Satz 5

Jede natürliche Zahl a hat höchstens a pos. Teiler.

Beweis:

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \mid a$.

$b \mid a \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} : q \cdot b = a$.

$q \in \mathbb{N} \Rightarrow q \geq 1$.

Es gilt $a = q \cdot b \geq 1 \cdot b = b$, also $b \leq a$.

$b \in \mathbb{N} \Rightarrow b \geq 1$. Insgesamt folgt $1 \leq b \leq a \Rightarrow$ Beh. $\square$

Bemerkung:

1) Wird in Def. 3 auch $a = 0$ zugelassen, erhalten wir eine Teilermenge mit unendl. vielen Elementen,
$T(0) = \mathbb{N}$.

2)
- Alle nat. Zahlen $a > 1$ die nicht Primzahlen sind, enthalten einen Teiler $b \in \mathbb{N}$ mit $b \neq a$, $b \neq 1$.
  Es gibt also ein $c \in \mathbb{N}$ mit $c \cdot b = a$.

  Diese Zahlen a nennt man <u>zusammengesetzte Zahlen</u> (vgl. spätere Def.)
- Die kleinste zusammengesetzte Zahl ist 4.
- 1 ist weder zusammengesetzt noch eine Primzahl.

3) Bestimmung der Elemente von $T(a)$, wobei a eine zusammengesetzte Zahl ist:

Die Teiler treten stets paarweise auf:

Teiler – komplementärer Teiler

$\Rightarrow$ Beschränkung auf die Bestimmung der Teiler von $b \leq \sqrt{a}$.

<u>Bei Quadratzahlen</u>: Ist $b = \sqrt{a}$, so auch $q = \sqrt{a}$.

$\Rightarrow$ Es gibt eine ungerade Anzahl von Teilern.

<u>Bei Nicht-Quadratzahlen</u>: Ist $b < \sqrt{a}$, so ist $q > \sqrt{a}$.

(denn wäre $q \leq \sqrt{a}$, so wäre $b \cdot q < a$)

$\Rightarrow$ Es gibt eine gerade Anzahl von Teilern

<u>Beispiele</u>:

$a = 24$

b	q
1	24
2	12
3	8
4	6

$a = 48$

b	q
1	48
2	24
3	16
4	12
6	8

$a = 64$

b	q
1	64
2	32
4	16
8	8

$T(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$T(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

$T(24) \subset T(48)$ und $24 \mid 48$