3. Relationen

Bildung eines kartesischen Produktes zweier Mengen

Seien X und Y Mengen.
Zu Elementen x und y mit $x \in X$ und $y \in Y$ können wir ein neues Objekt bilden, das

geordnete Paar (x, y).

Bedingung für Gleichheit (zweier geordneter Paare):

$$\boxed{(x,y) = (\bar{x},\bar{y}) \iff (x = \bar{x} \land y = \bar{y})}$$

(komponentenweise Gleichheit)

Def. kartesisches Produkt von X und Y (Produktmenge)

Die Menge aller geordneter Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$ nennen wir das kartesische Produkt von X und Y.

In Zeichen:

$$\boxed{X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X \land y \in Y\}}$$

Sprich: „X Kreuz Y"

Beispiele

1) Seien $X = \{1; 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. Dann gilt

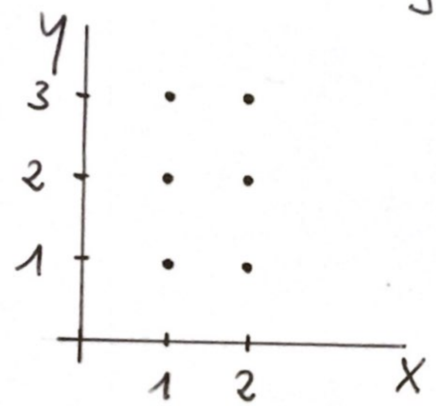
$$X \times Y = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$$

Darstellungen:

a) tabellarisch

$X \backslash Y$	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)

b) im Koordinatensystem



2) Aus dem Alltag ...

$B := \{ b_i \mid b_i \text{ Bluse Nr. } i, 1 \le i \le 4 \}$ (Menge der Blusen $b_1, \dots, b_4$)

$i \in [1;4]$

$H := \{ h_i \mid h_i \text{ Hose Nr. } i, 1 \le i \le 3 \}$ (Menge der Hosen h_1, h_2, h_3)

$$B \times H = \{(b_1, h_1), (b_1, h_2), (b_1, h_3), \dots, (b_4, h_3)\}$$

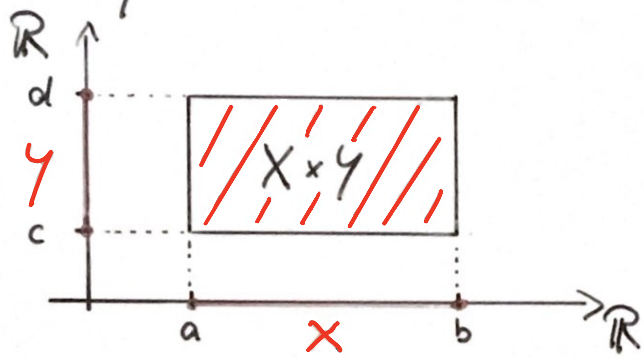
$\rightarrow$ Alle möglichen Kombinationen der 4 Blusen und 3 Hosen.

3) Seien $M = \{a, b\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$.

$M \times N = \{ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \}$

4) Für $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ mit $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$ $(a < b,\ c < d)$ ist

$X \times Y \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Rechteck.



<u>Bemerkungen:</u>

a) Bei Mengen: $\{x, y\} = \{y, x\}$. Bei geord. Paaren: $(x, y) \neq (y, x)$, falls $x \neq y$.

b) $(x, y) \in X \times Y \iff (x \in X \wedge y \in Y)$

c) $X^2 := X \times X$

d) $X \times Y \times Z := (X \times Y) \times Z$, also $(x, y, z) := ((x, y), z)$ (geordnetes Tripel)

e) $X^3 := X \times X \times X$

[Bsp. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$]

f) Verallgemeinerung

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ endlich viele Mengen, so ist

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

kartesisches Produkt dieser Mengen.

Die Elemente $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nennt man (geordnete) n-Tupel.

Beispiele:

$\mathbb{R}^1$ (Zahlengerade (reell))

$\mathbb{R}^2$ (reelle Ebene)

$\mathbb{R}^3$ („Anschauungsraum", 3-dim reeller Raum)

$\mathbb{R}^n$ (n-dim reeller Raum)

Überlegung:

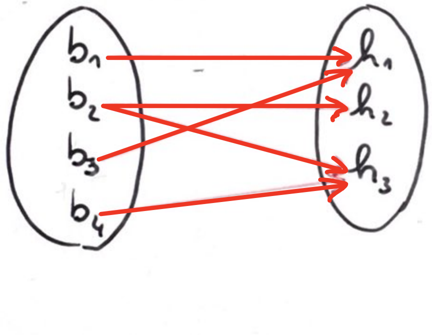
In Beispiel 2 gab es eine Menge mit Blusen und eine mit Hosen:

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$
$$H = \{h_1, h_2, h_3\}$$

Nicht alle Kombinationen passen farblich zusammen, also ist nur eine Teilmenge von $B \times H$ für mich interessant.
Ich überlege mir eine Relation „passt zu" und zwei Elemente stehen genau dann in Relation zueinander, wenn sie zueinander passen.

z.B. $R := \{(b_1, h_1), (b_2, h_2), (b_2, h_3), (b_3, h_1), (b_4, h_3)\}$

	h_1	h_2	h_3
b_1	X		
b_2		X	X
b_3	X		
b_4			X



→ Mithilfe von Paaren lassen sich Beziehungen zwischen den Elementen zweier Mengen formal beschreiben.

Def. Relation

Seien X, Y Mengen, sei $R \subseteq X \times Y$.
Dann heißt (R, X, Y) zweistellige Relation zwischen X und Y.
Die Menge R heißt Graph der Relation.

Anmerkung:

Falls keine Verwechslung zu befürchten ist, spricht man auch von R allein als Relation zwischen X und Y
(bzw. falls gilt: $X = Y$ als „Relation auf X").

Schreibweise:

Ist $\rho = (R, X, Y)$ Relation, dann schreibt man

$$\boxed{x \rho y \;:\Leftrightarrow\; (x,y) \in R \text{ für } x \in X \text{ und } y \in Y.}$$

(„x steht in Relation ρ zu y")

oder, falls keine Verwechslung zu befürchten ist:

$\boxed{x R y}$ und $\boxed{R := \{(x,y) \in X \times Y \mid x R y\}}$

Beispiele:

- Elementbeziehung: $x \overset{\text{Relation}}{\in} M$
- Teilmengenbeziehung: $A \subset B$
- Auf $\mathbb{R}$ „kleiner-gleich" („$\leq$"): $x \leq y$
- Auf $\mathbb{R}$ „kleiner als" („$<$"): $x < y$
- Ist X die Menge der Einwohner einer Stadt, so kann man Relationen wie z.B. „ist Bruder von" oder „ist Mutter von" betrachten.

Möglichkeiten zur Veranschaulichung einer Relation $\rho = (R, X, Y)$

a) Hervorhebung der Elemente von R im Diagramm von $X \times Y$ (Darstellung des Graphen von ρ).

b) Pfeildiagramm zu ρ : $x \longrightarrow y$ bedeutet $x \rho y$.

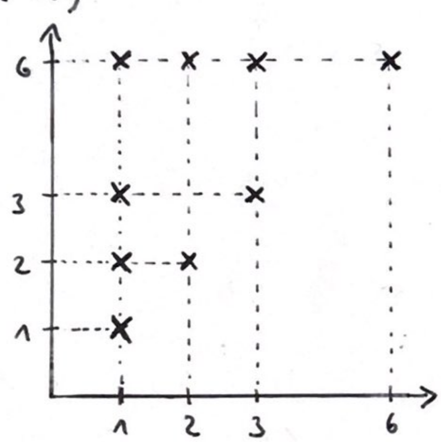
Beispiel (1):

Seien $X = Y = T_6 := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } 6\}$
$= \{1, 2, 3, 6\}$

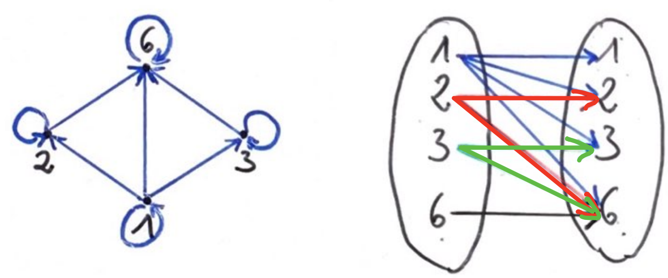
$R := \{(x, y) \in T_6 \times T_6 \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$
$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (2,2), (2,6), (3,3), (3,6), (6,6)\}$

(R, T_6, T_6) heißt Teilbarkeitsrelation auf T_6.

zu a)



zu b)

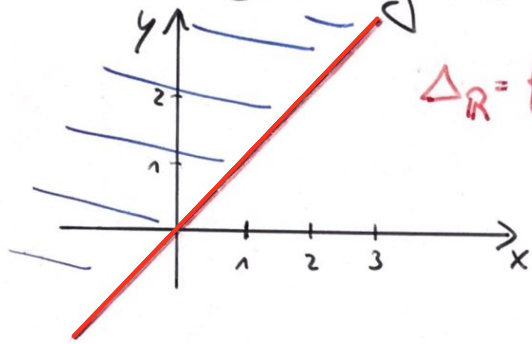


Beispiel (2):

Seien $X = Y = \mathbb{R}$ und $R := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}$

$\left(\leq \; := (R, \mathbb{R}, \mathbb{R}) \right.$ heißt natürliche Ordnungsrelation auf $\left.\mathbb{R}\right)$

zu a) (nur Teildarstellung des Graphen von „$\leq$" möglich)



$\Delta_{\mathbb{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$
(weiteres Beispiel)

zu b) Ein Pfeildiagramm ist nicht darstellbar.

Beispiel (3):

Seien A eine bel. Menge und $X = Y = A$. Dann heißt

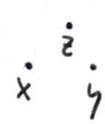
$$\Delta_A := \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$$

Diagonale von $A \times A$.

Die Relation $id_A := (\Delta_A, A, A)$ heißt Gleichheitsrelation oder auch Identität auf A:

$$\boxed{x \; id_A \; y \iff x = y}$$

Pfeildiagramm?



falls $x \neq y \neq z$

Beispiel (4): Graphen von Abbildungen → Exkurs

Exkurs: Abbildungen

[„altes" Skript S. 198 – 209
hier E1 – E14]

Def. Abbildung (Def. (1))

Seien X, Y Mengen.

Wenn eine Zuordnungsvorschrift erklärt ist, die jedem Element aus X genau ein Element aus Y zuordnet, so nennt man dies eine Abbildung (auch: Funktion) von X nach Y.

Ist f der Name für diese Abbildung, so schreibt man kurz $f: X \to Y$ und bezeichnet, für $x \in X$, mit $f(x)$ dasjenige Element aus Y, das x zugeordnet wird.

Schreibweise: $f: \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ Zuordnungsvorschrift

oder $f: X \to Y$ mit $x \mapsto f(x)$
„x wird abgebildet auf f(x)"

X wird als Definitionsbereich und

Y als Wertebereich von f bezeichnet.

Definition:

Seien X, Y Mengen und $P = (R, X, Y)$ eine Relation zwischen X und Y. Dann heißt

(i) P linkstotal, wenn $\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} : (x,y) \in R$ gilt.

(ii) P rechtseindeutig, wenn

$$\left(\forall_{x \in X} \forall_{y_1, y_2 \in Y}\right) : \left[(x P y_1 \wedge x P y_2) \Rightarrow y_1 = y_2 \right]$$

Definition: Abbildung (Def. (2))

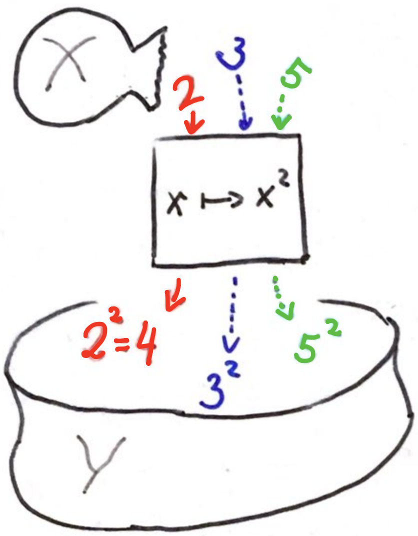
Eine Relation f zwischen X und Y heißt Abbildung von X in Y (synonym: Funktion auf X mit Werten in Y), wenn f linkstotal und rechtseindeutig ist.

(auch: ..., wenn für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x,y) \in R$ existiert (wobei $f = (R, X, Y)$ gilt; R also Graph von f ist))

<u>Dynamische Vorstellung</u>: Abbildung als Automat

Für jedes $x \in X$ wird ein eindeutig bestimmtes $f(x) \in Y$ produziert.

Bsp.:



„ 4 ist das <u>Bild</u> von 2 unter der Abbildung f"

„ 2 ist ein <u>Urbild</u> von 4 unter der Abbildung f"

<u>Vorsicht</u>: 1) Im Wertebereich Y kann es Elemente geben, die kein Urbild in X besitzen!

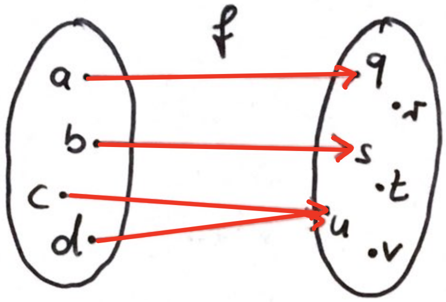
2) Im Definitionsbereich X kann es Elemente geben, die auf dasselbe Element in Y abgebildet werden!

Bsp. zu 1) Sei $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{R}$ $(x \mapsto x^2)$, dann besitzt 2 kein Urbild in X. [da $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar].

Bsp. zu 2) Sei $X = \mathbb{R} = Y$ $(x \mapsto x^2)$, dann werden z.B. 3 und -3 beide auf 9 abgebildet.

Darstellung

- einer Abbildung durch ein Pfeildiagramm:



also: $f(a) = q$
$f(b) = s$
$f(c) = u$
$f(d) = u$

[Von jedem Elt. startet genau ein Pfeil!]

[Es dürfen mehrere oder auch kein Pfeil ankommen!]

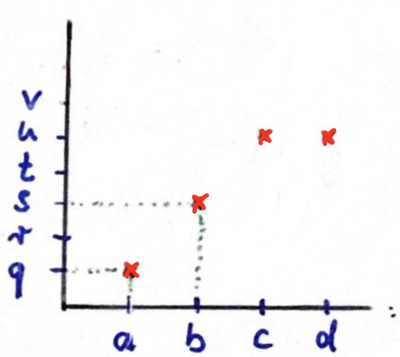
- eines Graphen einer Abbildung

Def. Graph

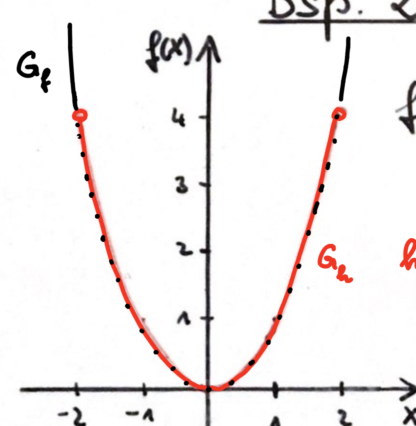
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

heißt Graph von f

Bsp. 1



Bsp. 2



$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

$[0;4[$

$h: \begin{cases}]-2;2[\to \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

mit $]-2;2[\subseteq \mathbb{R}$

Aus der Schule bekannte Beispiele für Abbildungen:

Funktionale Zusammenhänge werden durch Abbildungen beschrieben:

z.B. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2+3 \end{cases}$, $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$

$h : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

$k : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x+5 \end{cases}$

In der Schulgeometrie:

Kongruenzabbildungen (z.B. Kongruenz von Dreiecken)
wie z.B. Spiegelungen, Drehungen und Parallelverschiebungen

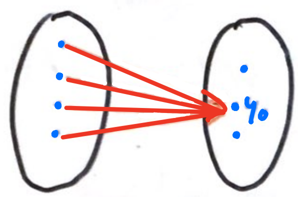
Ähnlichkeitsabbildungen
wie z.B. Streckungen

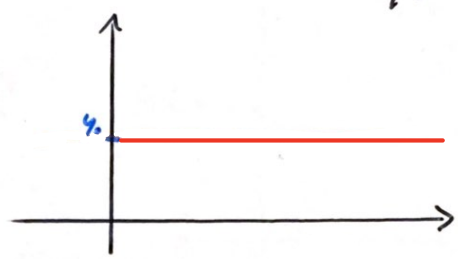
Spezialfälle:

Definition:

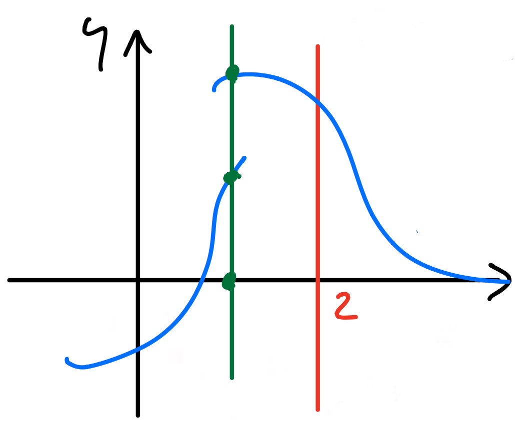
a) Seien X, Y Mengen, $y_0 \in Y$.

$$f_{y_0}: \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto y_0 \end{cases}$$ heißt **konstante Abbildung** mit Wert y_0





Frage: Gibt es eine Abbildung, deren Graph eine Gerade ist, die parallel zur y-Achse verläuft?



Nein, denn bei dieser würde einem Wert aus dem Definitionsbereich mehr als ein Element zugeordnet werden.

Eine solche Gerade, z.B durch die Stelle 2, kann man in der Form $x = 2$ angeben.

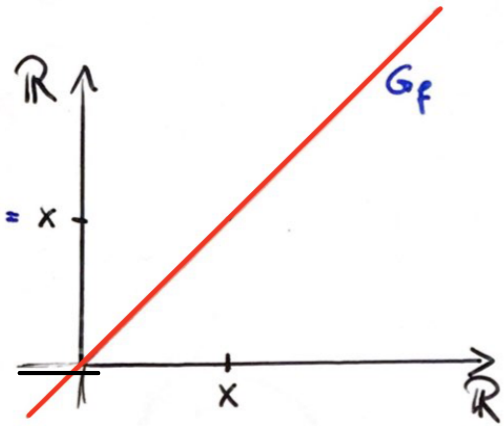
b) Sei X Menge. Dann heißt

$$id_X : \begin{cases} X \to X \\ x \mapsto x \end{cases}$$ Identität, identische Abbildung auf X

[Es gilt $J_{X \to X} = id_X$.]

Bsp. $$id_{\mathbb{R}} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$$

[in der Schule: $f(x) = x$]



c) Die Abb. $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ mit den Zuordnungen

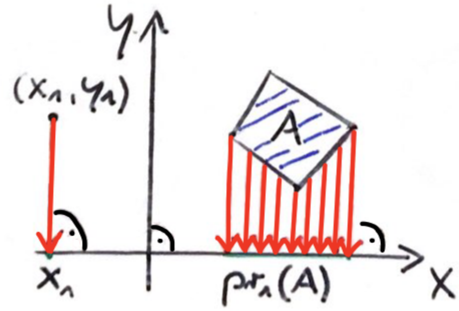
$$(0,0) \mapsto 0$$
$$(0,1) \mapsto 1$$
$$(1,0) \mapsto 1$$
$$(1,1) \mapsto 0$$

steht in engstem Zusammenhang zur bereits def. Addition auf $\{0,1\}$, nämlich $f : (x,y) \mapsto x \oplus y$.

d) Weitere wichtige Abb. von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sind die Projektionen

$$pr_1 : \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad pr_2 : \begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto y \end{cases}$$

Bsp. zu pr_1 :



Def. Bild, Urbild

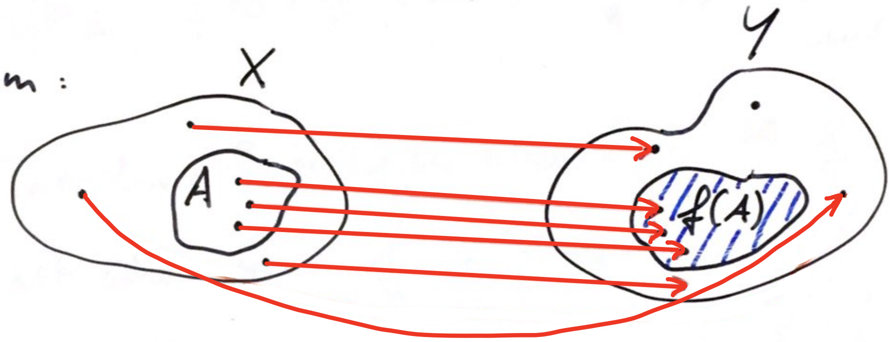
Sei $f : X \to Y$ Abbildung.

a) Für $A \subseteq X$ heißt die Menge

$$\boxed{f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \}}$$

Bild von A unter f.

Diagramm:



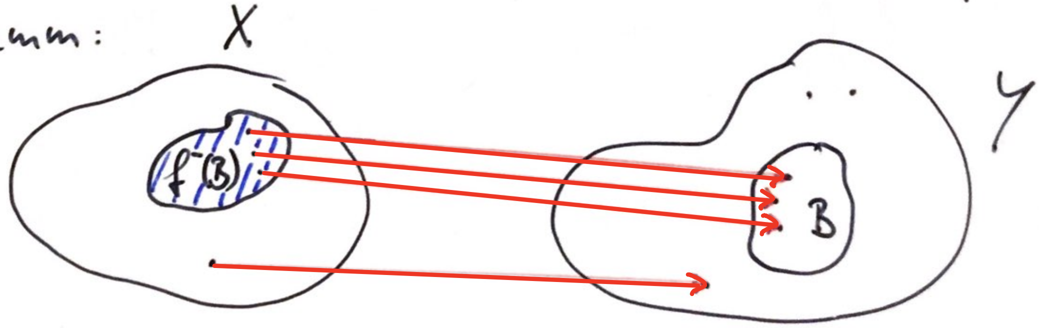
b) Für $B \subseteq Y$ heißt die Menge

$$\boxed{f^{-}(B) := \{ x \in X \mid f(x) \in B \}}$$

(**volles**) **Urbild** von B unter f.

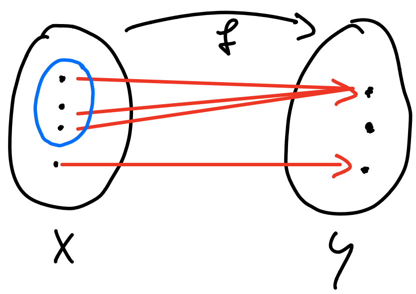
(oft schreibt man auch $f^{-1}(B)$ statt $f^{-}(B)$)

Diagramm:



Bemerkungen

- Es gibt Abbildungen $f: X \to Y$, bei denen das volle Urbild eines einzelnen Elements aus mehr als einem Element besteht, z.B.

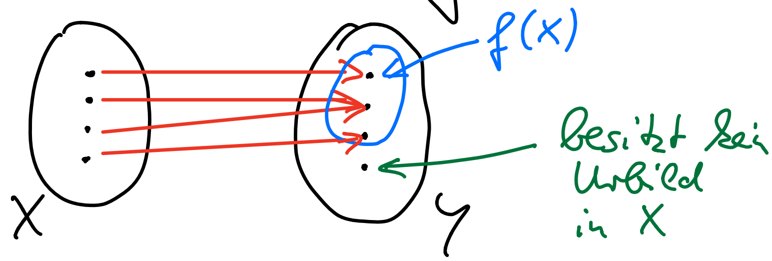


In einem solchen Fall ist die Abbildung

NICHT INJEKTIV.

Kommt dies bei keinem Element des Bildes $f(X)$ der Abbildung vor, dann sagt man, die Abbildung ist INJEKTIV (Def. s.u.).

- Es gibt Abbildungen $f: X \to Y$, bei denen das Bild $f(X)$ echte Teilmenge von Y ist, z.B.



In einem solchen Fall ist die Abb. NICHT SURJEKTIV.

Frage: Wann nennt man eine Abbildung SURJEKTIV?

Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn jedes Element aus dem Wertebereich ein Urbild besitzt, wenn also gilt: $f(X) = Y$.

(Def. s.u.)

Def.

Eine Abb. $f: X \to Y$ (mit vorgeg. Wertebereich Y)

heißt (i) surjektiv (rechtstotal), falls $f(X) = Y$

(ii) injektiv (linkseindeutig), falls gilt:

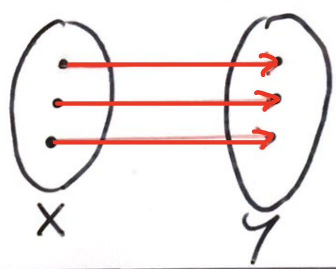
$$\forall_{x_1, x_2 \in X} : \left[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right]$$

verboten!

(iii) bijektiv, falls sie surjektiv und injektiv ist.

Diagramm:

Bsp.

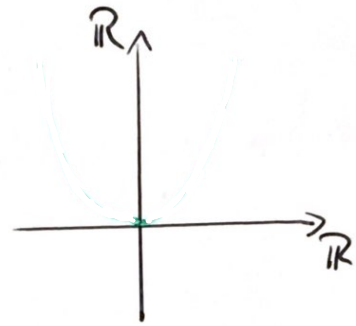


Also:

$$\boxed{f: X \to Y \text{ bijektiv} \iff \forall_{y \in Y} \exists 1\, x \in X : f(x) = y}$$

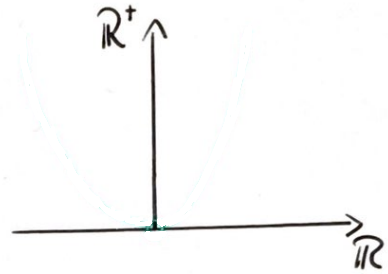
Beispiele:

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$



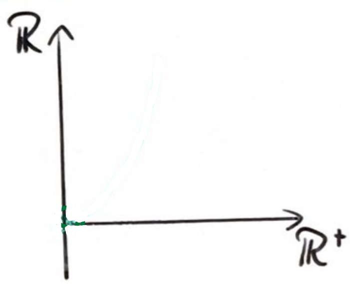
ist weder surjektiv noch injektiv.

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$



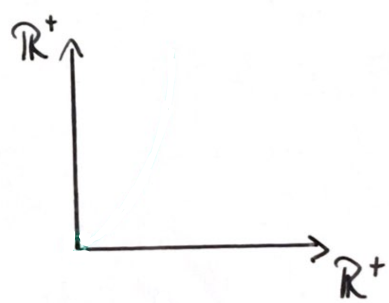
ist ________, aber nicht ________.

$$f_3 = f_1|_{\mathbb{R}^+} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$



ist nicht ________, aber ________.

$$f_4 = f_2|_{\mathbb{R}^+} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$



ist ________.

Folgerung für eine Abbildung f:

$$\boxed{f: X \to Y \text{ ist bij.} \iff f^{-1} \text{ ist Abbildung von } Y \text{ nach } X.}$$

Bezeichnung: f^{-1} heißt „die zu f inverse Abb.".

Eigenschaft: $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$ f.a. $x \in X$ und $y \in Y$.

Also: Die Umkehrrelation einer bij. Abb. $f: X \to Y$ ist eine Abb. $f^{-1}: Y \to X$.

Def. Umkehrrelation

Sei $\rho = (R, X, Y)$ Relation.

Dann heißt die Relation $\rho^{-1} := (R^{-1}, Y, X)$
mit $R^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in R\}$
inverse Relation oder Umkehrrelation von ρ
(andere Schreibweise : ρ^{-})

Also : $(x,y) \in R \iff (y,x) \in R^{-1}$

bzw. $x \rho y \iff y \rho^{-1} x$

Beispiele:

- Umkehrrelation von „ $\leq$ " ist „ $\geq$ "

  Bsp. $2 \leq 3 \iff 3 \geq 2$

- Umkehrrel. der Relation „ ist Teiler von" auf $\mathbb{N}$
  ist die Relation „ ist Vielfaches von" auf $\mathbb{N}$.

- Umkehrrel. der Relation „$\subseteq$" auf $\mathcal{P}(X)$ ist „ $\supseteq$ "

- $(id_A)^{-1} = id_A$

(Mögliche) Eigenschaften von Relationen

Def. Eine Relation heißt transitiv, g.d.w. gilt

$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz.$$

Bspe: „ist kleiner als", „ist Teiler von", „ist Vielfaches von"

„ist parallel zu", Gleichheit.

GegenBsp.: „ist Vorgänger von" ($3 \text{ vor } 4 \wedge 4 \text{ vor } 5 \not\Rightarrow 3 \text{ vor } 5$)

„ist Mutter von", „ist Sohn von", „ist senkrecht zu".

Def. Eine Relation heißt reflexiv, g.d.w. gilt

$$\forall x \in X : xRx$$

Bspe: „ist parallel zu", „ist Teiler von", „ist Teilmenge von"

GegenBsp: „kleiner als", „größer als", „ist senkrecht zu"

„ist echte Teilmenge".

Def. Eine Relation heißt symmetrisch, g.d.w. gilt

$$\forall x \in X, y \in Y : xRy \Rightarrow yRx$$

Bspe.: „parallel zu", „senkrecht zu"

GegenBsp.: „kleiner als", „ist Mutter von"

Def. Eine Relation heißt antisymmetrisch, g.d.w. gilt

$$\forall x \in X, y \in Y : (xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$$

oder $$\forall x \in X, y \in Y \text{ mit } x \neq y : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$$

Bspe. „kleiner gleich", „Teilmenge von"

Wichtige Relationen

1. Äquivalenzrelation

Def. Äquivalenzrelation.

Sei M Menge $(X = Y = M)$ und ϱ Relation auf M.
Dann heißt ϱ Äquivalenzrelation auf M,
wenn gilt:

(1) Reflexivität $x \varrho x$

(2) Symmetrie $x \varrho y \Leftrightarrow y \varrho x$

(3) Transitivität $x \varrho y \wedge y \varrho z \Rightarrow x \varrho z$

für alle $x, y, z \in M$.

Schreibweisen:

$$\left.\begin{array}{ll} & x \sim y \\ \text{oder} & x \approx y \\ \text{oder} & x \equiv y \end{array}\right\} \text{Ähnlichkeit zur Gleichheitsrelation.}$$

Bem.: Äquivalenzrel. liefert Möglichkeit zur Klasseneinteilung

1. Beispiele:

- id_M
- Vektorgleichheit (ist Äqui.rel.) auf der Menge der Pfeile der Ebene
- Kongruenz von Figuren der Ebene
- „ist parallel zu", „gleiche Länge wie"
- Wertgleichheit von Brüchen, z.B. $K(\frac{1}{2}) := \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\}$

2. Beispiel:

Auf $M = \mathbb{Z}$ definieren wir nach Auswahl eines festen $m \in \mathbb{N}$ eine Relation „$\equiv$" durch

$$\boxed{\begin{array}{l} x \equiv y \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, t \in \mathbb{Z} : x - y = t \cdot m \\ \qquad\qquad (\Longleftrightarrow \; m \text{ teilt } (x-y)) \end{array}}$$

Bezeichnung: Kongruenz modulo m.

Präzisere Schreibweise:	$x \equiv y \pmod m$
oder	$x \equiv y \; (m)$

Anmerkung:

Besitzen ganze Zahlen x und y den gleichen Rest r bei Division durch m (ex. also $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ mit $x = t_1 m + r$ und $y = t_2 m + r$), so folgt ebenfalls $x \equiv y \pmod m$.

Umgekehrt besitzen modulo m kongruente Zahlen den gleichen (nicht-negativen) Rest bei Division durch m (der kleiner als m ist).

Beispiele: $24 \equiv 3 \pmod 7$ $\qquad$ $4 \equiv 1 \pmod 3$

$\Longleftrightarrow 24 - 3 = t \cdot 7$

$25 \equiv 1 \pmod 8$

Satz 1:
Sei „$\equiv$" die in Beispiel 2 definierte Relation „Kongruenz modulo m" ($m \in \mathbb{N}$ fest)

Behauptung:
„$\equiv$" ist eine Äquivalenzrelation.

Zu zeigen: 1) Reflexivität
2) Symmetrie
3) Transitivität

zu 1) Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $x \equiv x$, da mit $0 \in \mathbb{Z}$ ein Element aus $\mathbb{Z}$ existiert, so dass gilt

$$x - x = 0 = 0 \cdot m \qquad (\text{f.a. } m \in \mathbb{N}).$$

zu 2) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Nach Def. gilt:

$$x \equiv y \iff \exists\, t \in \mathbb{Z} : (x-y) = t \cdot m.$$

Wegen $m \mid -(x-y) = -x+y = (y-x)$ existiert auch ein $t' \in \mathbb{Z}$: $(y-x) = t' \cdot m$, also $y \equiv x$.

zu 3) Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv y$ und $y \equiv z$.

$$x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow \exists\, t, t' \in \mathbb{Z} \text{ mit } \begin{array}{r} (x-y) = t \cdot m \\ (y-z) = t' \cdot m \end{array} \Big| +$$

$$x - y + y - z = tm + t'm$$

$$\iff x - z = \underbrace{(t+t')}_{=:t''} m$$

$\Rightarrow$ Es ex. $t'' \in \mathbb{Z}$ mit $x - z = t'' m$

$\iff x \equiv z$ $\square$

Def. Äquivalenzklasse

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M.

Dann heißt für jedes $a \in M$ die Menge

$$[a] := \{ b \in M \mid b \sim a \}$$

die Äquivalenzklasse von a und

a ist ein Repräsentant von $[a]$.

Beispiel:

Bei „Kongruenz mod 2" mit $\bar{a} := [a]$ gilt:

$$\bar{1} = [1] = \{ \dots -3, -1, 1, 3, 5, \dots \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ungerade} \}$$
$$= \overline{-3} = \bar{3} = \overline{-5} = \bar{5} \qquad = 1 + 2\mathbb{Z}$$

$$\bar{0} = [0] = \{ \dots, -2, 0, 2, 4, \dots \} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ gerade} \}$$
$$= \overline{-2} = \bar{2} = \overline{-4} = \bar{4} \qquad = 0 + 2\mathbb{Z}$$

[**Abkürzende Schreibweise:**

$$1 + 2\mathbb{Z} = \{ 1 + 2 \cdot 0, 1 + 2 \cdot 1, 1 + 2 \cdot (-1), 1 + 2 \cdot 2, \dots \}$$
$$= \{ 1, 3, -1, 5, -3, \dots \}$$

Def. Partition

$\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ heißt **Partition** (**Faserung**, **disjunkte Zerlegung**), wenn gilt:

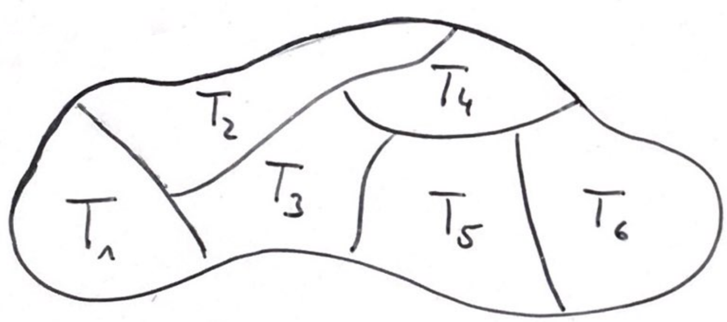
(1) $\forall x \in M \; \exists T \in \mathfrak{T} : x \in T$ (Überdeckungseigenschaft)

(2) $\forall T_1, T_2 \in \mathfrak{T} : (T_1 \neq T_2 \Rightarrow T_1 \cap T_2 = \emptyset)$ (paarweise disjunkte Mengen)

Oft fordert man noch:

(3) $\emptyset \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **Fasern** oder **Komponenten**.



Satz 2:

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, dann gilt für die Menge $M/\sim \; := \{[a] \mid a \in M\}$ der Äquivalenzklassen:

i) $a \in [a]$ für alle $a \in M$;

ii) $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$ für alle $[a], [b] \in M/\sim$.

Die Menge der Äquivalenzklassen $M/\sim$ bildet eine Partition von M.

Beweis:

Zu i) $\forall a \in M: \; a \sim a \Rightarrow \forall a \in M: \; a \in [a]$

Zu ii) Zu zeigen: $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$ für alle $[a], [b] \in M/\sim$.

also zu zeigen: $\neg([a] \cap [b] = \emptyset) \Rightarrow \neg([a] \neq [b])$

also zu zeigen: $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$

für alle $[a], [b] \in M/\sim$.

Fortsetzung des Beweises

Es ist also z.z.: $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$

Annahme: Es ex. $[a], [b] \in M/\sim$ mit $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Sei $c \in [a] \cap [b]$. Dann gilt:

$$(c \sim a) \wedge (c \sim b)$$

$$\underset{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} (a \sim c) \wedge (c \sim b)$$

$$\underset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} (a \sim b) \Rightarrow a \in [b]$$

$$\forall d \in [a] : d \sim a \underset{a \sim b \text{ und Transitivität}}{\Rightarrow} d \sim b \Rightarrow d \in [b]$$

$$\Rightarrow \forall d \in [a] : d \in [b] \Rightarrow [a] \subseteq [b]$$

Wegen der Symmetrie von $\sim$ $(a \sim b \Leftrightarrow b \sim a)$ folgt auch $[b] \subseteq [a]$ und wegen doppelter Inklusion gilt also $[a] = [b]$.

$\square$