2. Mengen (Mengensprechweise)

Georg Cantor (1845-1918) begründete die Mengenlehre.

Definition: (klassisch)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die Objekte heißen Elemente der Menge.

Ist M eine Menge und a ein Element von M, schreibt man: $a \in M$

Negation: „a ist nicht Element von M": $a \notin M$

Bemerkung 1:

Bei einer mathematischen Menge muss für jedes Objekt eindeutig entscheidbar sein, ob es zu der Menge gehört oder nicht.

Das Problem der Entscheidbarkeit tritt oft auf,
z.B. betrachte man die
„Menge der Einwohner von Berlin".
Zeitpunkt? Gemeldet? Erstwohnsitz?

<u>Russelsche Antinomien</u> (1901):

„M ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten."

<u>Frage</u>: „Enthält sie sich?

<u>Antwort</u>: 1. Fall: Sie enthält sich nicht. Dann gehört sie jedoch zu den Mengen, die in M enthalten sind. ↯

2. Fall: Sie enthält sich. Dann enthält M eine Menge, die sich selbst enthält. ↯

→ Die klassische Definition ist nicht präzise genug!

→ Bemerkung 1 ist für die Definition einer mathematischen Menge unerlässlich.

Mengendefinitionen

1. Aufzählung der Elemente

Bsp. • $M := \{1, 5, 7\}$

„M ist definiert als die Menge, die die Zahlen 1, 5 und 7 enthält."

• {rot, gelb, grün} Menge der „Ampelfarben"

• $\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ Menge der Farben beim Skat

Bemerkung:

1) Die Reihenfolge der Elemente ist unwichtig.

Bsp. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$

2) Mehrfachnennungen sind möglich.

Bsp. $\{1, 1, 7, 8, 9, 9\} = \{1, 7, 8, 9\}$

2. Beschreibung durch Eigenschaften

Informell: Man gibt an, um welche Objekte es geht und welche Eigenschaft sie haben sollen.

Formal: Ist G Grundmenge, $E(X)$ Aussageform mit Variable x und G zulässiger Objektbereich für $E(X)$, so bildet man die Menge aller Elemente $x \in G$, für die $E(X)$ zu einer wahren Aussage wird: $M := \{ x \in G \mid E(x) \}$

Beispiele:

$M := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl} \}$

$G := \{ z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist gerade} \}$

$H := \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl}, n > 1000 \}$

$K := \{ n \in \mathbb{N} \mid n > 3 \wedge n < 7 \} =$

Vorteil: Man kann Mengen mit unendlich vielen Elementen, also unendliche Mengen definieren.

3. Beschreibung mithilfe von Pünktchen

$$M := \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$
$$= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$$

$$K := \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Übereinkunft: Ist suggestiv klar, wie die Auflistung fortgeführt wird, so wird die „Pünktchenschreibweise" zugelassen.

Selbstverständlich benötigt auch die Mengenlehre ein „Fundament", sog. Axiome (Grundeigenschaften).

Exemplarisch wird hier das „Paarmengenaxiom" genannt, welches sicherstellt, dass durch Aufzählung der Elemente eindeutig eine Menge beschrieben wird.

> **Paarmengenaxiom:**
> Sind a und b Objekte, so gibt es eine Menge C
> mit $\forall d : (d \in C \Leftrightarrow d = a \lor d = b)$
>
> Schreibweise: $C = \{a, b\}$

Zahlen und Intervalle

Es gibt verschiedene Mengen von Zahlen.

Beispiele: Die Menge der ...

... natürlichen Zahlen : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

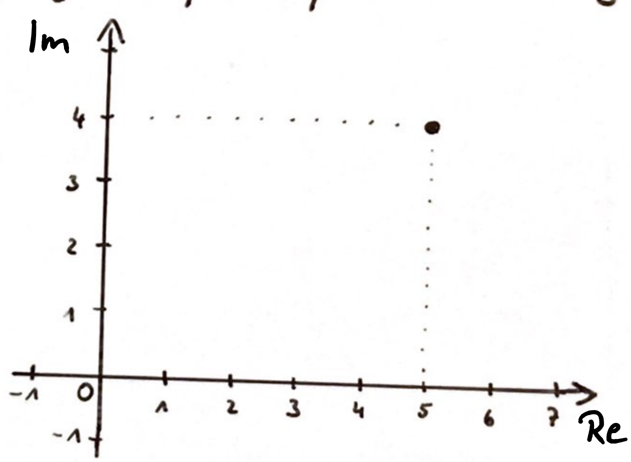
... ganzen Zahlen : $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

... rationalen Zahlen : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$

... reellen Zahlen $\mathbb{R}$, bestehend aus allen Dezimalbrüchen.

... komplexen Zahlen : $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$

Darstellung der komplexen Zahl $5 + 4i$ in der Gauß'schen Zahlenebene.



Beispiel einer Berechnung:

$$
\begin{aligned}
(2+3i)^2 - 2i + 5 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 - 2i + 5 \\
&= 4 + 12i + 3^2 i^2 - 2i + 5 \\
&= 4 + 12i + 9(-1) - 2i + 5 \\
&= 0 + 10i \\
&= \underline{\underline{10i}}
\end{aligned}
$$

$\mathbb{C}$ komplexe Zahlen

(1831 von Gauß so bezeichnet,
aber bereits
1545 von G. Cardano erwähnt und
1572 von R. Bombelli notiert)

erweitern den Zahlbereich der reellen Zahlen derart, dass $x^2 + 1 = 0$ lösbar ist.

→ Praktischer Einsatz in Natur- und Ingenieurwissenschaften

- Quantenmechanik
- Schwingungsvorgänge
- komplexe Wechselstromrechnungen
- Fluiddynamik

⋮

Quaternionen

Verallgemeinerung der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$$

(1843 von Sir W. R. Hamilton
→ „Hamilton-Zahlen"

$\mathbb{H}$

$$a + bi + cj + dk \quad \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

und

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad \text{und}$$

$$i \cdot j \cdot k = -1 \qquad \text{und}$$

$$i \cdot j = k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j,$$

$$j \cdot i = -k, \quad k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j.$$

Gedenktafel an der Broom Bridge mit den Multiplikationsregeln der Quaternionen

Bildquelle: https://commons.m.wikimedia.org/wiki/File:William_Rowan_Hamilton_Plaque_-_geograph.org.uk_-_347941.jpg#mw-jump-to-license (8.9.2018)

Vertiefende Informationen, sowie Informationen zu Anwendungsbereichen von Quaternionen sind z. B. unter folgender URL zu finden: https://mathepedia.de/Quaternionen.html (12.9.2018)

Intervalle

Def.

Für alle endlichen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt:

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)

$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offenes Intervall)

$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (halboffenes Intervall)

$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

$]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

(uneigentliche Intervalle)

$\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$

Bem.

Manchmal werden auch runde Klammern verwendet.

Es gilt: $[a,b[= [a,b)$ und $]a,b[= (a,b)$.

Grundlegende Begriffe und Definitionen

Frage: Wie sieht die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Z} \mid 7x = 3\} \quad \text{aus?}$$

$\nexists\, x \in \mathbb{Z} : 7x = 3$ M enthält also kein Element.

Def. „leere Menge"

Die leere Menge $\emptyset$ (oder auch $\{\,\}$) ist die Menge, die kein Element enthält.

Es gilt: i) $\forall x : x \notin \emptyset$

ii) $\emptyset \subseteq A$ f.a. Mengen A

Def. Teilmenge (Inklusion)

Eine Menge T heißt Teilmenge von einer Menge M (in Zeichen $T \subseteq M$), wenn jedes Element von T auch ein Element von M ist.

M heißt dann Obermenge von T.

Beschreibung einer Teilmenge in mathematischer „Kurzschreibweise“: $T \subseteq M \Leftrightarrow \forall x : (x \in T \Rightarrow x \in M)$

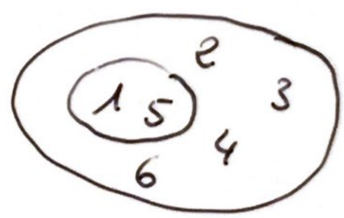
Bem.

Ist $T \subseteq M$, aber $T \neq M$, dann sprechen wir von einer echten Teilmenge: $T \subset M \Leftrightarrow T \subseteq M \wedge T \neq M$.

[Manche Autoren verwenden anstelle von „$\subseteq$“ das Symbol „$\subset$“ und anstelle von „$\subset$“ das Symbol „$\subsetneq$“]

Beispiele:

- $\{1,5\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$



- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Def. Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen M und N heißen gleich ($M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen.

Also:
$$\begin{aligned} M = N &\Leftrightarrow \forall x : (x \in M \Leftrightarrow x \in N) \\ &\Leftrightarrow (x \in M \Rightarrow x \in N) \wedge (x \in N \Rightarrow x \in M) \\ &\Leftrightarrow M \subseteq N \wedge N \subseteq M \end{aligned}$$

Verknüpfungen von Mengen

Def. Vereinigung von zwei Mengen (Vereinigungsmenge)

Sind M und N Mengen, so bezeichnet

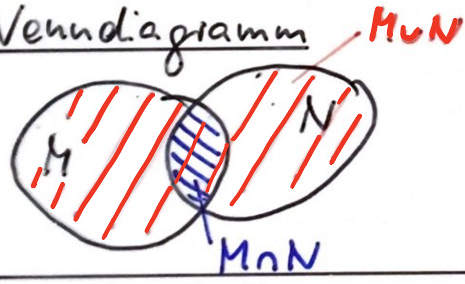
$M \cup N$ (sprich „M vereinigt N“ „die Vereinigung von M und N“)

diejenige Menge, die aus allen Elementen besteht, die zu M, zu N oder zu beiden Mengen gehören.

Also: $M \cup N := \{ x \mid x \in M \vee x \in N \}$

Bsp.

Venndiagramm



Bsp.

- $M := \{1, 2, 3\}$, $N := \{3, 4, 5\}$
  $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $T_8 = \{1, 2, 4, 8\}$, $T_6 = \{1, 2, 3, 6\}$
  $T_8 \cup T_6 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

Def. Durchschnitt von zwei Mengen (Schnittmenge)

Sind M und N Mengen, so bezeichnet

$M \cap N$ (sprich „M geschnitten N“ „Durchschnitt von M und N“)

diejenige Menge, die aus allen Elementen besteht, die gleichzeitig zu M und N gehören.

Also: $M \cap N := \{ x \mid x \in M \wedge x \in N \}$

Bsp. $T_8 \cap T_6 = \{1, 2\}$

Bem.

1) Ist $M \cap N = \emptyset$, so sagt man M und N sind <u>disjunkt.</u>

2) Wird eine Vereinigung aus disjunkten Mengen gebildet, heißt dies eine <u>disjunkte Vereinigung.</u>

Def. **Differenz**

Sind M und N Mengen, so bezeichnet

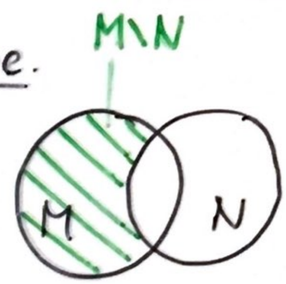
$M \setminus N$ (sprich „M ohne N"
„Differenz von M und N")

diejenige Menge, die aus allen Elementen besteht, die zwar in M, aber nicht in N liegen.

Also $M \setminus N := \{x \in M \mid x \notin N\}$

Bspe.

1)



2)

$C_M N$
Komplementärmenge von N in M!

3) $\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\}$
$= \{1,2\}$

Def. **Komplement** (Spezialfall einer Differenz)

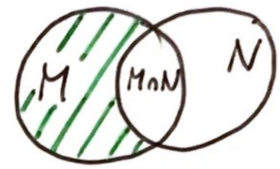
Im Fall $N \subseteq M$ heißt $M \setminus N$ <u>Komplement</u> <u>von N in M</u> (in Zeichen: $C_M N$)

[siehe oben Bsp. 2]

Eigenschaften von Differenz und Komplement

a) Zurückführung der Differenzbildung auf die Komplementbildung:

$$M \setminus N = C_M(M \cap N)$$

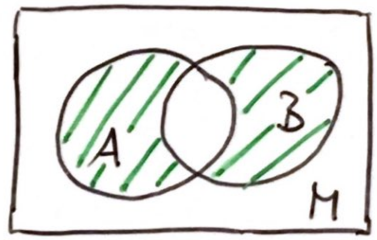


$C_M(M \cap N) = M \setminus N$

b) Def. Symmetrische Differenz

Für $A, B \subseteq M$ definiert man:

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

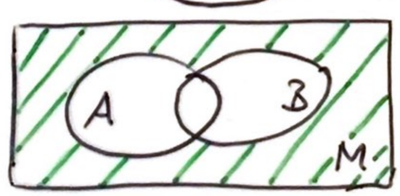


c) Regeln von de Morgan:

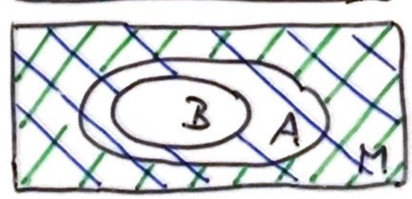
Für $A, B \subseteq M$ und $C = C_M$ gilt

i) $C(CA) = A$

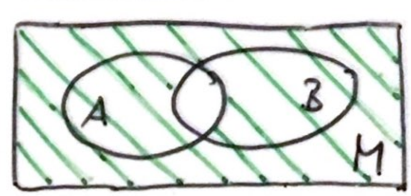
ii) $C(A \cup B) = CA \cap CB$



iii) $B \subseteq A \iff \underline{CA} \subseteq \underline{CB}$



iv) $C(A \cap B) = CA \cup CB$



Def. **Potenzmenge**

Ist M eine Menge, so versteht man unter der Potenzmenge von M ($\mathcal{P}(M)$) diejenige Menge, die alle Teilmengen von M enthält.

Also: $\mathcal{P}(M) := \{ T \mid T \subseteq M \}$

Bem.

Es gilt stets:

i) $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$

ii) $M \in \mathcal{P}(M)$

iii) $\{a\} \in \mathcal{P}(M)$, falls $a \in M$.

Beispiele:

- Sei: $M = \{1, 2, 3\}$.

  $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

- Sei: $A = \{a\}$.

  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, A\}$

Bemerkung:

Für jede endliche Menge M gilt:

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$$

Dabei wird mit $|A|$ die Mächtigkeit der Menge A bezeichnet.

Bei endlichen Mengen entspricht die

„Mächtigkeit der Menge"

der

„Anzahl der Elemente der Menge".

Beweisidee:

Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ endliche Menge und $\mathcal{P}(M)$ die zugehörige Potenzmenge, also die „Menge aller Teilmengen von M".

Notiert man alle Elemente von M,

	a_1	a_2	...	a_n
T_1	n	n	...	n
T_2	j	n	....	n
T_3	n	j	...	n
⋮				

so kann bei jedem Element entschieden werden, ob es zu einer Teilmenge gehört oder nicht. Es gibt somit $2^{|M|}$ unterschiedliche Möglichkeiten, eine TM zu bilden.

$T_1 = \{\}$, $T_2 = \{a_1\}$, $T_3 = \{a_2\}$, ...

<u>Beispiel</u>:

- Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

$\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 3$	
T_1	n	n	n	$\varnothing$
T_2	j	n	n	$\{1\}$
T_3	n	j	n	$\{2\}$
T_4	n	n	j	$\{3\}$
T_5	j	j	n	$\{1,2\}$
T_6	n	j	j	$\{2,3\}$
T_7	j	n	j	$\{1,3\}$
T_8	j	j	j	$\{1,2,3\}$

$|\mathcal{P}(M)| = 2^3$

$= \underline{\underline{8}}$

Satz

Für beliebige Mengen A, B, C gelten folgende Regeln:

1. **Kommutativgesetze**:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{und} \quad A \cap B = B \cap A$$

2. **Assoziativgesetze**:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. **Distributivgesetze**:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Beweis-Skizze zu 3a:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Longleftrightarrow x \in A \lor x \in (B \cap C) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \lor (x \in B \land x \in C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \cup B \land x \in A \cup C \\ &\Longleftrightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)] \end{aligned}$$

$\square$

Wir zeigen: $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	B	C	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	w	w	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	w	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

=

Da in den Spalten von $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ und $A \vee (B \wedge C)$ alle Wahrheitswerte übereinstimmen, gilt die Behauptung.