Beweis zur Addition $\oplus$ in $\mathbb{Z}$.

Seien $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{N}$ und seien
$(a, b) \sim (a_1, b_1)$ und $(c, d) \sim (c_1, d_1)$
Nach Def. der Add. gilt:

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(a+c, b+d)] \quad \text{und}$$

$$[(a_1,b_1)] \oplus [(c_1,d_1)] = [(a_1+c_1, b_1+d_1)]$$

Nach Vor. gilt:
$(a, b) \sim (a_1, b_1)$ und $(c, d) \sim (c_1, d_1)$, also

$$\begin{array}{l|l} a + b_1 = b + a_1 & \text{und} \\ c + d_1 = d + c_1 & + \\ \hline \end{array}$$

$a + c + b_1 + d_1 = b + d + a_1 + c_1$ und es folgt nach Def.

$$(a+c, b+d) \sim (a_1+c_1, b_1+d_1)$$

$\square$

Beweis zur Multiplikation $\odot$ in $\mathbb{Z}$.

Seien $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{N}$ und $(a,b) \sim (a_1, b_1)$, $(c,d) \sim (c_1, d_1)$
Also gilt $a + b_1 = a_1 + b$ und somit $(a+b_1)c_1 = (a_1+b)c_1$
und $(a+b_1)c_1 + ad + a_1d_1 + bd = (a_1+b)c_1 + ad + a_1d_1 + bd$.
Das liefert $a(c_1+d) + b_1c_1 + a_1d_1 + bd = a_1c_1 + b(c_1+d) + ad + a_1d_1$.
Nun erhält man wegen $c_1 + d = c + d_1$:
$a(c+d_1) + b_1c_1 + a_1d_1 + bd = a_1c_1 + b(c+d_1) + ad + a_1d_1$
Dies ist dasselbe wie:
$ac + ad_1 + b_1c_1 + a_1d_1 + bd = a_1c_1 + bc + ad + (a_1+b)d_1$.
Die rechte Seite umformen liefert $ac + ad_1 + b_1c_1 + a_1d_1 + bd$
$= a_1c_1 + bc + ad + (a+b_1)d_1$. Nachdem ad_1 auf beiden Seiten weggelassen wurde und die Reihenfolge der Summanden geändert wurde bleibt $ac + bd + a_1d_1 + b_1c_1 = ad + bc + a_1c_1 + b_1d_1$. Daher gilt
$(ac+bd, ad+bc) \sim (a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1)$ $\square$

Satz:

Für die auf $\mathbb{Z}$ def. Addit. und Multipl. gelten die folgenden Eigenschaften:

1) Abgeschlossenheit

$[(a,b)] \overset{\oplus}{\odot} [(c,d)] \in \mathbb{Z}$ für alle $[(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Z}$

2) Assoziativgesetz

$$[(a,b)] \overset{\oplus}{\odot} \left([(c,d)] \overset{\oplus}{\odot} [(e,f)] \right) = \left([(a,b)] \overset{\oplus}{\odot} [(c,d)] \right) \overset{\oplus}{\odot} [(e,f)]$$

für alle $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in \mathbb{Z}$

3) Existenz eines neutralen Elements (bzgl. $\oplus$, $\odot$)

$$[(a,b)] \oplus [(1,1)] = [(1,1)] \oplus [(a,b)] = [(a,b)]$$

$$[(a,b)] \odot [(2,1)] = [(2,1)] \odot [(a,b)] = [(a,b)]$$

für alle $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$

4) Existenz von inversen Elementen (bzgl. $\oplus$)

$$[(a,b)] \oplus [(b,a)] = [(b,a)] \oplus [(a,b)] = [(a+b, a+b)]$$
$$= [(1,1)]$$

für alle $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$

5) <u>Kommutativgesetz</u>

$$[(a,b)] \overset{\oplus}{\odot} [(c,d)] = [(c,d)] \overset{\oplus}{\odot} [(a,b)]$$

für alle $[(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Z}$

6) <u>Distributivgesetz</u>

$$([(a,b)] \oplus [(c,d)]) \odot [(e,f)]$$

$$= ([(a,b)] \odot [(e,f)]) \oplus ([(c,d)] \odot [(e,f)])$$

$$[(a,b)] \odot ([(c,d)] \oplus [(e,f)])$$

$$= ([(a,b)] \odot [(c,d)]) \oplus ([(a,b)] \odot [(e,f)])$$

für alle $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in \mathbb{Z}$

Beweis:

Siehe K. Reiss, Basiswissen Zahlentheorie, S. 165/166

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Überlegung:

$$1 = 2 \cdot x$$
$$2 = 4 \cdot x$$
$$3 = 6 \cdot x$$
$$\vdots$$

sind nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar.

Es gibt also Gleichungen der Form

$$a = b \cdot x \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z},$$

die nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar sind.

Es ist sinnvoll zu fordern: $b \neq 0$,

da $a = 0 \cdot x$ $\begin{cases} \text{in } \mathbb{Z} \text{ nicht lösbar ist, falls } a \neq 0. \\ \text{in } \mathbb{Z} \text{ nicht eindeutig lösb. ist, falls } a = 0. \end{cases}$

Analog zum Vorgehen bei der Einführung von $\mathbb{Z}$, fassen wir das Zahlenpaar (a, b) so auf, dass es für die Lösung der Gleichung $a = b \cdot x$ steht.

Überlegung: GEHEIM!

Betrachte $(a, b), (c, d)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0 \neq d$, welche dieselbe Zahl x darstellen:

$$a = b \cdot x \qquad\qquad c = d \cdot x$$

$$\frac{a}{b} = x \qquad\qquad \frac{c}{d} = x$$

Also gilt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

und damit $\underline{\underline{ad = cb}}$

Satz:

Auf der Menge $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \in \mathbb{Z}, z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ ist durch $(a,b) \sim (c,d) :\Longleftrightarrow ad = bc$ eine Äquivalenzrelation definiert.

[also $R := \{((a,b),(c,d)) \mid ad = bc\}$]

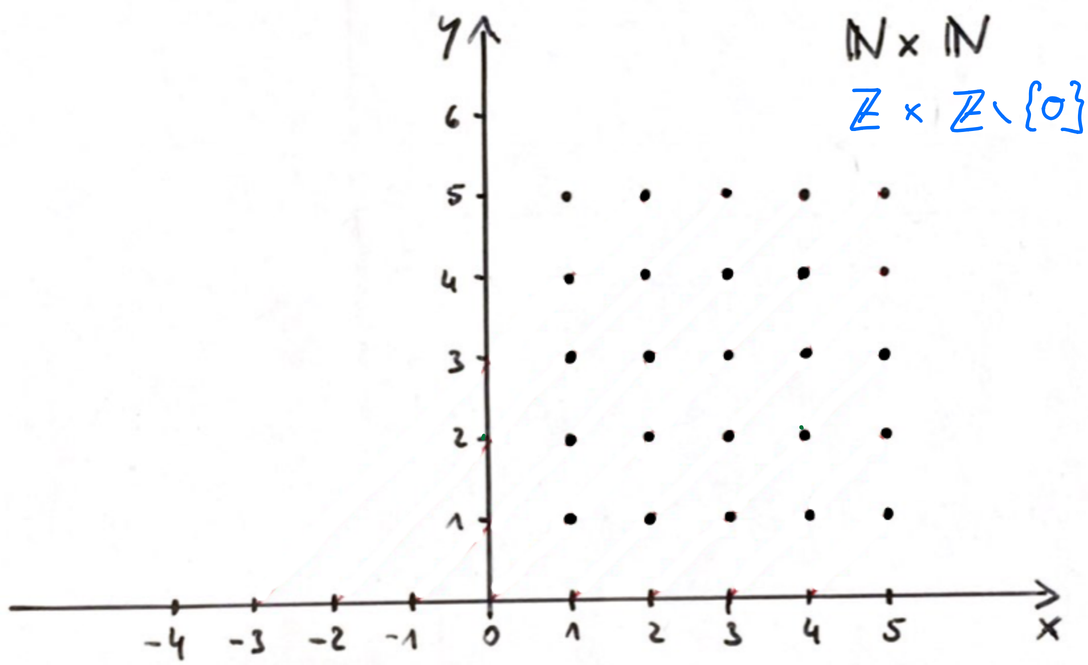
Beweis: Übungsaufgabe.

Def. (rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$)

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist die Gesamtheit der Äquivalenzklassen der im obigen Satz definierten Äquivalenzrelation, also:

$$\mathbb{Q} := \{ [(a,b)] \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \}$$

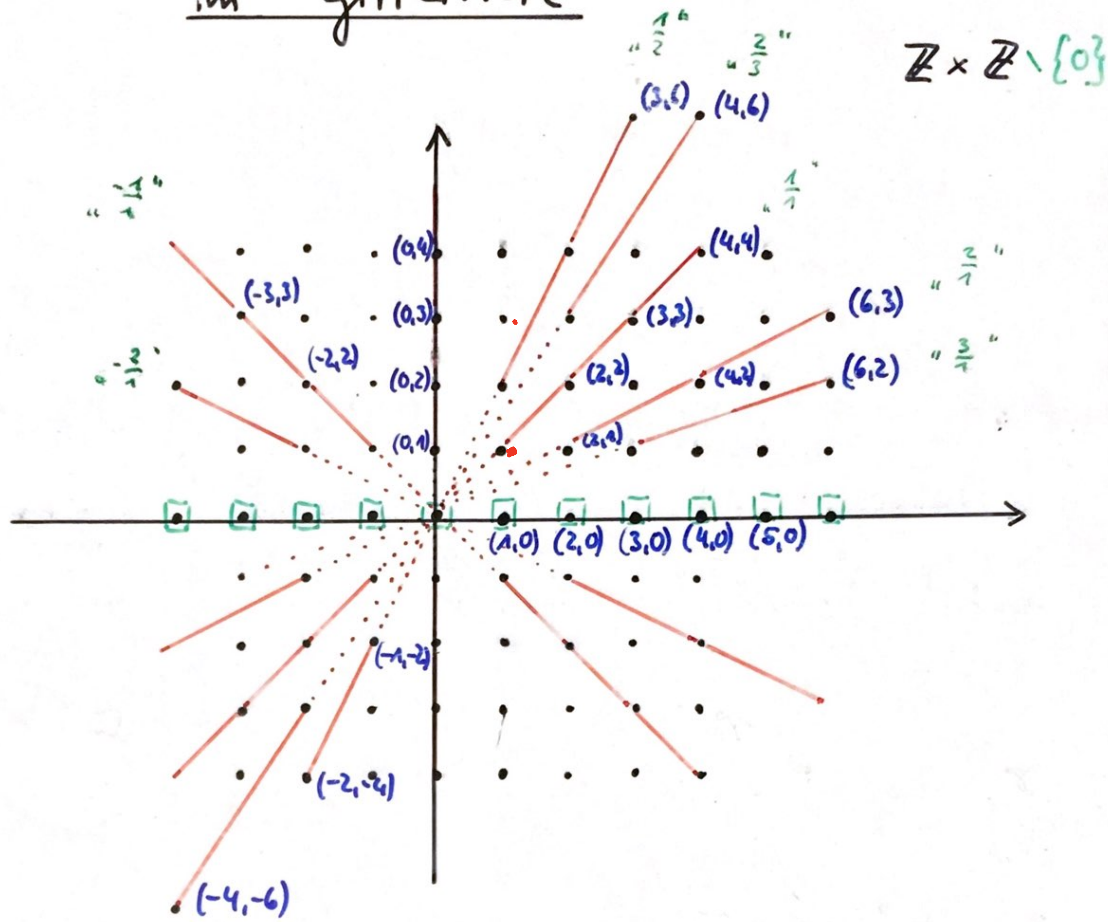
mit
$$[(a,b)] = \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \mid (a,b) \sim (c,d)\}$$
$$= \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \mid ad = bc\}$$
für die Paare $(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
y
x
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
1 2 3 4 5 6

Darstellung der rationalen Zahlen im Gitternetz

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$



Bem.:

1) Alle Pkte (außer (0,0)) auf einer Geraden beschreiben dieselbe rat. Zahl.
2) Pkte. auf der x-Achse gehören nicht dazu! ($b \neq 0$).
3) " " " y-Achse $[(0,y)]$, $y \in \mathbb{Z}$ repräsentieren 0.
4) Sind beide Elte. des Zahlenpaares pos./neg., so ist die rat. Zahl pos.
5) Ist ein Elt. des Zahlenpaares pos. u. eins neg., " " " " " neg.

Beobachtung:

Wird nur der „Zähler" immer größer (kleiner), geht der Wert der Zahl gegen ∞ ($-\infty$)

" " „Nenner" " " " , " " " " " 0

Rechnen mit rationalen Zahlen

Überlegung: GEHEIM!

$x \quad y$

$(a,b) \quad (c,d)$

$a = bx \quad c = dy$

$x = \frac{a}{b} \quad y = \frac{c}{d}$

$x + y = z$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$ad + bc = bd \cdot z$$

$(ad+bc,\ bd)$

$x \cdot y = z$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{bd}$$

$$ac = bd \cdot z$$

$(ac,\ bd)$

Def.

Für $[(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Q}$ sei durch

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] := [(ad+bc,\ bd)]$$

eine Addition und durch

$$[(a,b)] \odot [(c,d)] := [(ac,\ bd)]$$

eine Multiplikation definiert.

Satz:

Die auf $\mathbb{Q}$ definierten Operationen „Addition" und „Multiplikation" sind wohldefiniert.
Für $(a,b), (a',b'), (c,d), (c',d') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ mit $(a,b) \sim (a',b')$ und $(c,d) \sim (c',d')$ gilt also:

(i) $(ad+bc, bd) \sim (a'd'+b'c', b'd')$ und

(ii) $(ac, bd) \sim (a'c', b'd')$

Beweisskizze:

$$\left.\begin{aligned} (a,b) \sim (a',b') &\iff ab' = ba' \\ (c,d) \sim (c',d') &\iff cd' = dc' \end{aligned}\right\} (*)$$

$$(ad+bc) \cdot b'd' \underset{\text{Distribut. in } \mathbb{Z}}{=} adb'd' + bcb'd' \underset{\text{Kommut. in } (\mathbb{Z},\cdot)}{=} ab'dd' + cd'bb'$$

$$\underset{(*)}{=} ba'dd' + dc'bb' \underset{\text{Kommut. in } (\mathbb{Z},\cdot)}{=} bd \cdot a'd' + bdc'b' \underset{\text{Distribut. in } \mathbb{Z}}{=} bd \cdot (a'd'+b'c')$$

und

$$ac \cdot b'd' \underset{\text{Kommut. in } (\mathbb{Z},\cdot)}{=} ab'cd' \underset{(*)}{=} ba'dc' \underset{\text{Kommut. in } (\mathbb{Z},\cdot)}{=} a'c' \cdot bd$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Bemerkung:

Wir haben bereits die Beobachtung gemacht, dass es zu jeder natürlichen Zahl eine entsprechende ganze Zahl in $\mathbb{Z}$ gibt und dass es zu jeder ganzen Zahl eine entsprechende rationale Zahl in $\mathbb{Q}$ gibt.

Es ist sogar möglich

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ isomorph in $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ einzubetten und

$(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ isomorph in $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ einzubetten.

(vgl. K. Reiss, Satz 6.3.4, S. 172 und
Satz M.1.5., S. 306)

Da die isomorphe Einbettung an dieser Stelle zu weit führen würde, wird zu diesem Zeitpunkt nur auf die Existenz der o.g. Sätze hingewiesen und folgende Vereinbarung getroffen: Man bezeichnet für $a \in \mathbb{N}$ das Element $[(a+1, 1)] \in \mathbb{Z}$ mit a bzw. $+a$ und das Element $[(1, a+1)] \in \mathbb{Z}$ mit $-a$.

Für $\oplus$ und $\odot$ schreiben wir dann nur noch $+$ und $\cdot$.

Bemerkungen zu $\mathbb{Q}$:

1) Bruchschreibweise:

Für $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sei $\frac{a}{b} := [(a,b)]$

2) Statt $\oplus$ und $\odot$ schreibt man $+$, $\cdot$ (mit den üblichen Vereinbarungen)

3) Man schreibe 0 für $\frac{0}{1} = [(0,1)]$ und

1 für $\frac{1}{1} = [(1,1)]$ und

n für $\frac{n}{1} = [(n,1)]$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

4) Man definiert:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{a}{b} &:= \frac{-a}{b} \\ -\frac{a}{b} &:= \frac{a}{-b} \end{aligned}\right\} \text{ für die } \underline{\text{additive Inverse rat. Zahl zu } \tfrac{a}{b}}.$$

$$\left(\text{also } \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab + b\cdot(-a)}{b^2} = \frac{ab - ab}{b^2} = \frac{0}{b^2} = 0\right)$$

Im Fall $a \neq 0$ schreibt man auch

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} := \frac{b}{a}$ für das <u>multiplikative Inverse zu $\frac{a}{b}$</u>

$$\left(\text{also } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = 1\right)$$

__Satz__:

Für die auf $\mathbb{Q}$ def. Addit. und Multipl. gelten die folgenden Eigenschaften:

1) __Abgeschlossenheit__

$$[(a,b)] \overset{\oplus}{\odot} [(c,d)] \in \mathbb{Q} \qquad \text{für alle } [(a,b)], [(c,d)] \in \mathbb{Q}$$

2) __Assoziativgesetz__

$$[(a,b)] \overset{\oplus}{\odot} \left([(c,d)] \overset{\oplus}{\odot} [(e,f)]\right) = \left([(a,b)] \overset{\oplus}{\odot} [(c,d)]\right) \overset{\oplus}{\odot} [(e,f)]$$

für alle $[(a,b)], [(c,d)], [(e,f)] \in \mathbb{Q}$

3) __Existenz eines neutralen Elements__ (bzgl. $\oplus, \odot$)

$$[(a,b)] \oplus [(0,1)] = [(0,1)] \oplus [(a,b)] = [(a,b)]$$

$$[(a,b)] \odot [(1,1)] = [(1,1)] \odot [(a,b)] = [(a,b)]$$

für alle $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$

4) __Existenz von inversen Elementen__ (bzgl. $\oplus, \odot$)

$$[(a,b)] \oplus [(-a,b)] = [(-a,b)] \oplus [(a,b)] = [(0,1)]$$

$$[(a,b)] \odot [(b,a)] = [(b,a)] \odot [(a,b)] = [(1,1)]$$

falls gilt $a \neq 0$

für alle $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$

9. Algebraische Strukturen

In den vorangegangenen Betrachtungen konnte festgestellt werden, dass bei den Zahlbereichen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ mit den jeweils zugehörigen inneren Verknüpfungen „Addition" und „Multiplikation" ein oder mehrere Eigenschaften vorhanden sind und Gesetze wie z.B. das Assoziativ-, Kommutativ- oder Distributivgesetz gelten.

Sie bilden Beispiele für sogenannte algebraische Strukturen.

Man unterscheidet z.B. Halbgruppen, Gruppen, Ringe und Körper.

Deren Definitionen werden im Folgenden betrachtet.

Def.: Sei G $(\neq \emptyset)$ Menge und $\circ$ eine Verknüpfung in G.
Für die auf G def. [Addit. und Multipl.] Verknüpfung gelten die folgenden Eigenschaften:

1) Abgeschlossenheit

$a \circ b \in G$ für alle $a, b \in G$

2) Assoziativgesetz

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in G$

3) Existenz eines neutralen Elements

Es ex. ein Elt. $e \in G$, so dass gilt:

$a \circ e = e \circ a = a$ für alle $a \in G$

e heißt neutrales Element.

4) Existenz von inversen Elementen

Zu jedem Elt. $a \in G$ ex. ein Elt. $a^{-1} \in G$, so dass gilt:

$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ für alle $a \in G$

a^{-1} heißt inverses Elt zu a.

Dann heißt $(G, \circ)$ eine Gruppe.

5) Kommutativgesetz

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{für alle } a, b \in G.$$

Gilt in einer Gruppe $(G, \circ)$ das Kommutativgesetz, so heißt die Gruppe eine abelsche bzw. kommutative Gruppe

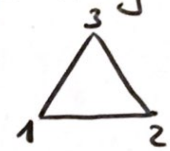
Beispiel einer Gruppe:

Betrachte die Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks:

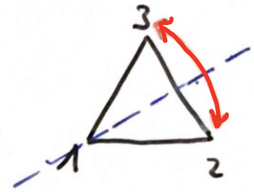
Elemente von S_3

Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks

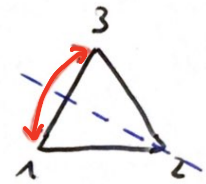
$$\delta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$$



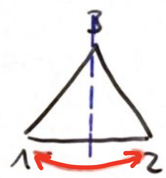
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



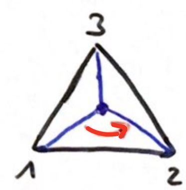
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



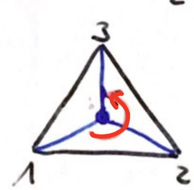
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$(S_3, \circ)$ ist eine Gruppe

$(\{id, d_1, d_2, s_1, s_2, s_3\}, \circ)$ ist eine Gruppe

Satz:

Für die auf $\mathbb{N}$ def. Addit. und Multipl. gelten die folgenden Eigenschaften:

1) Abgeschlossenheit

$a \stackrel{+}{\cdot} b \in \mathbb{N}$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$

2) Assoziativgesetz

$a \stackrel{+}{\cdot} (b \stackrel{+}{\cdot} c) = (a \stackrel{+}{\cdot} b) \stackrel{+}{\cdot} c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ sind Halbgruppen.

Sätze zu Gruppen

Satz:
In einer Gruppe $(G, \circ)$ gibt es genau ein neutrales Element und zu jedem $a \in G$ genau ein inverses Element $a^{-1} \in G$.

Beweis: Seien e, e' neutrale Elemente von $(G, \circ)$.

Dann gilt: $e = e \circ e'$, da e' neutr. Elt.
und $e' = e \circ e'$, da e neutr. Elt.

Also gilt: $e = e \circ e' = e'$.

Seien $a^{-1}, a' \in G$ mit $a \circ a^{-1} = e = a \circ a'$.

Dann gilt:

$$a^{-1} = a^{-1} \circ e \underset{\text{n. Vor.}}{=} a^{-1} \circ (a \circ a') \underset{\text{Assoz.}}{=} (a^{-1} \circ a) \circ a' \underset{\text{n. Vor.}}{=} e \circ a' = a'$$

$\square$

Satz:

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.
Dann ist die Gleichung $a \circ x = b$ für alle $a, b \in G$ eindeutig lösbar.

Bew.: Seien $x, x' \in G$ mit $x = a^{-1} \circ b$ und $a \circ x' = b$.

Dann gilt:

$$x' \underset{a^{-1} \circ a = e}{=} a^{-1} \circ a \circ x' \underset{n.Vor.}{=} a^{-1} \circ b$$

Da a^{-1} eind. bestimmt ist, ist auch $a^{-1} \circ b$ eind. best. und es folgt $x = x'$. $\square$

Satz:

In einer Gruppe $(G, \circ)$ gelten die Kürzungsregeln, d.h. aus $a \circ b = a \circ c$ folgt $b = c$
und aus $a \circ c = b \circ c$ folgt $a = b$

für alle $a, b, c \in G$.

Bew. Sei $a \circ b = a \circ c$. Dann ist $a^{-1} \circ a \circ b = a^{-1} \circ a \circ c$ und somit $b = c$.
Analog gilt mit $a \circ c = b \circ c$ auch
$a \circ c \circ c^{-1} = b \circ c \circ c^{-1}$ und somit $a = b$

$\square$

Def. : **Ring**

Sei R Menge und seien $+$ und $\cdot$ Verknüpfungen in R (Abgeschlossenheit bzgl. $+$ und $\cdot$ vorhanden).
Dann heißt $(R,+,\cdot)$ ein **Ring**, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $(R,+)$ ist abelsche Gruppe.

(ii) $(R,\cdot)$ ist Halbgruppe

(iii) Es gelten die Distributivgesetze

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad \text{und}$$

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \qquad \text{für alle } a,b,c \in R.$$

Gilt in $(R,\cdot)$ das Kommutativgesetz, so heißt $(R,+,\cdot)$ ein **kommutativer Ring**.

Das neutrale Elt. der Addition heißt <u>Nullelement</u> und wird in der Regel mit 0 bezeichnet.

Gibt es auch ein neutrales Elt. der Multiplikation, dann heißt es <u>Einselement</u> und wird mit 1 bezeichnet.

Bemerkung:

i) Ein Ring R heißt nullteilerfrei, wenn gilt

$$\forall a, b \in R : [a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0].$$

ii) Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt Integritätsbereich, wenn er nullteilerfrei und kommutativ ist und mindestens zwei Elemente enthält.

Beispiele für Integritätsbereiche

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Def. **Körper**

Sei K eine Menge, und seien + und · innere Verknüpfungen in K.
Dann heißt $(K, +, \cdot)$ ein **Körper**, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $(K, +)$ ist abelsche Gruppe mit neutr. Elt $0 \in K$.

(ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe mit neutr. Elt. $1 \in K$.

(iii) Es gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

für alle $a, b, c \in K$.

Aufgabe:

Entscheiden Sie, welche der Zahlbereiche (bzgl. $+, \cdot$)

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Halbgruppen, Gruppen, Ringe, Körper sind.

Begründen Sie jeweils, weshalb ein Zahlbereich nicht mehr zur jeweils nächsten Struktur gehört

(also z.B.: Weshalb ist $(\mathbb{N},+)$ zwar eine Halbgruppe, aber keine Gruppe?)

Zahlbereich	Halbgruppe	Gruppe	Ring	Körper	Begründung
$(\mathbb{N},+)$					
$(\mathbb{N},\cdot)$					
$(\mathbb{Z},+)$					
$(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$					
$(\mathbb{Q},+)$					
$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$					
$(\mathbb{R},+)$					
$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$					

Satz:

$\boxed{(\mathbb{Z}, +, \cdot) \text{ ist ein kommutativer Ring mit Einselement}}$

Bew.: Folgt direkt aus dem Satz über die Eigenschaften der Add. und Mult. in $\mathbb{Z}$.

Satz:

$\boxed{(\mathbb{Q}, +, \cdot) \text{ ist ein Körper.}}$

Bew.: Folgt direkt aus dem Satz über die Eigenschaften der Add. und Mult. in $\mathbb{Q}$.

Exkurs: „K-Algebra"

Sei $(V, +, \underset{K}{\cdot})$ ein K-Vektorraum (K Körper), sei $(V, +, \cdot)$ ein Ring und es gelten folgende Verträglichkeitsbedingungen:

$$\forall a, b \in V \ \forall \lambda \in K : (a \cdot b) \underset{K}{\cdot} \lambda = (a \underset{K}{\cdot} \lambda) \cdot b = a \cdot (b \underset{K}{\cdot} \lambda),$$

dann heißt $(V, +, \underset{K}{\cdot}, \cdot)$ eine K-Algebra.

Beispiele von Algebren:

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit den üblichen Verknüpfungen sind $\mathbb{Q}$-Algebren.
- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ " " " " " $\mathbb{R}$-Algebren
- Die Menge der Polynomabbildungen von K bilden mit den „üblichen Verknüpfungen" eine K-Algebra.
- Die Menge $C[0,1]$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen, reellen Funktionen ist eine $\mathbb{R}$-Algebra. (bzgl. $+, \underset{\mathbb{R}}{\cdot}, \cdot$)
- $(K^{(n,n)}, +, \underset{K}{\cdot}, \cdot)$ ist K-Algebra [$(n \times n)$-Matrizen über K]
- $(\mathrm{End}(V), +, \underset{K}{\cdot}, \circ)$ ist K-Algebra [Endomorphismen auf n-dim K-VR]