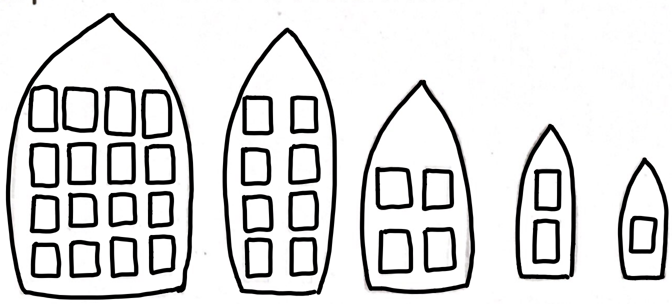
Ein kleiner Ausflug in den Primarbereich ...

Käpt´n Knut und sein Bootsverleih



16er	8er	4er	2er	1er	Anzahl Personen
					1
					2

...

Wenn Käpt'n Knut seine Boote vermietet, achtet er darauf, dass die Boote immer vollständig belegt sind. Sonst bekommt er Ärger mit seinem Chef. Belegte Boote kennzeichnet er mit 1, nicht belegte kleinere Boote mit 0.

Wie werden 2 [5] Personen auf die Boote verteilt?

	16er	8er	4er	2er	1er

160 b

Aufgaben

1. Erstelle einen Belegungsplan für die Boote von Käpt´n Knut für Personenanzahlen von 1 bis 10. Zeichne dazu eine Tabelle wie oben in dein Heft.
2. Wie werden 19 [24] Personen verteilt? Trage in die Tabelle ein.
3. In den Ferienzeiten kommen immer sehr viele Leute zum Bootsverleih, deshalb überlegt Käpt´n Knut, ob er weitere, größere Boote anschaffen soll. Wie viele Plätze sollte das nächst größere [das übernächste] Boot haben, damit Knuts System weiter funktioniert?

Zahldarstellungen und Stellenwertsysteme

Bsp. Darstellung von 14 603 im Dezimalsystem

$$14603 = 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Allg. Jedes $x \in \mathbb{N}$ lässt sich in der Form darstellen

$$x = x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + x_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x_i \, 10^i$$

für gewisse $x_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$, $x_n \neq 0$.

Die x_i nennt man die (dezimalen) Ziffern der natürlichen Zahl x.

Frage: Muss man 10-er Potenzen verwenden? Nein!

Bsp. $264 = \underline{2} \cdot 10^2 + \underline{6} \cdot 10^1 + \underline{4} \cdot 10^0$

$264 = \underline{2} \cdot 5^3 + \underline{0} \cdot 5^2 + \underline{2} \cdot 5^1 + \underline{4} \cdot 5^0$

$264 = \underline{1} \cdot 2^8 + \underline{0} \cdot 2^7 + \underline{0} \cdot 2^6 + \underline{0} \cdot 2^5 + \underline{0} \cdot 2^4 + \underline{1} \cdot 2^3 + \underline{0} \cdot 2^2 + \underline{0} \cdot 2^1 + \underline{0} \cdot 2^0$

$264 = \underline{1} \cdot 16^2 + \underline{0} \cdot 16^1 + \underline{8} \cdot 16^0$

Also: $264 = (264)_{10} = (2024)_5 = (100001000)_2 = (108)_{16}$

Bemerkung:

Wir bezeichnen mit $(a)_g$ die Zahl a im Stellenwertsystem zur Basis g.

Mit Hilfe der Division mit Rest erhält man durch geeignete Zerlegungen die Darstellung einer natürlichen Zahl a nach Potenzen einer anderen natürlichen Zahl g.

Beispiel:

$$2656 = 1 \cdot 7^4 + 255$$
$$255 = 5 \cdot 7^2 + 10$$
$$10 = 1 \cdot 7 + 3$$
$$3 = 3 \cdot 7^0$$

Damit gilt:

$$2656 = 1 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 7^0$$

also

$$(2656)_{10} = (10513)_7$$

<u>Allgemein</u>: Seien $a, g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$.

Ist g^n größte Potenz von g mit $a \geq g^n$ (und somit $a < g^{n+1}$), dann gilt:

$$a = q \cdot g^n + r \quad \text{für geeign. } q \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } q < g \text{ und ein } r \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 0 \leq r < g^n.$$

Mit $a_n := q$, $r_{n-1} := r$ erhält man durch wiederholte Anwendung der Division mit Rest:

$$\begin{aligned}
a &= a_n \cdot g^n + r_{n-1} \\
r_{n-1} &= a_{n-1}\, g^{n-1} + r_{n-2} \\
r_{n-2} &= a_{n-2}\, g^{n-2} + r_{n-3} \\
&\vdots \\
r_1 &= a_1\, g^1 + r_0 \\
r_0 &= a_0\, g^0 + 0
\end{aligned}$$

Die Darstellung von a zur Basis g:

$$(a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0)_g$$

„Ausschöpfungsalgorithmus"

Beispiele zum „Ausschöpfungsalgorithmus"

Stellenwertsysteme

Fragestellung: $207_{10} = ?_2$

1. Iteration:	$207 : 2^7 = 207 : 128$	$= \mathbf{1}$	Rest$_{128}$	79
2. Iteration:	$79 : 2^6 = 79 : 64$	$= \mathbf{1}$	Rest$_{64}$	15
3. Iteration:	$15 : 2^5 = 15 : 32$	$= \mathbf{0}$	Rest$_{32}$	15
4. Iteration:	$15 : 2^4 = 15 : 16$	$= \mathbf{0}$	Rest$_{16}$	15
5. Iteration:	$15 : 2^3 = 15 : 8$	$= \mathbf{1}$	Rest$_{8}$	7
6. Iteration:	$7 : 2^2 = 7 : 4$	$= \mathbf{1}$	Rest$_{4}$	3
7. Iteration:	$3 : 2^1 = 3 : 2$	$= \mathbf{1}$	Rest$_{2}$	1
8. Iteration:	$1 : 2^0 = 1 : 1$	$= \mathbf{1}$	Rest$_{1}$	0

Lösung: $207_{10} = \mathbf{11001111_2}$

Fragestellung: $308_{10} = ?_7$

1. Iteration:	$308 : 7^2 = 308 : \mathbf{49}$	$= \mathbf{6}$	Rest$_{49}$	14
2. Iteration:	$14 : 7^1 = \mathbf{14} : \mathbf{7}$	$= \mathbf{2}$	Rest$_{7}$	0
3. Iteration:	$0 : 7^0 = \mathbf{0} : \mathbf{1}$	$= \mathbf{0}$	Rest$_{1}$	0

Lösung: $308_{10} = \mathbf{620_7}$

Quelle:
http://www.cevis.uni-bremen.de/Binaries/Binary1105/_Skript.pdf

Beispiele zum „Algorithmus der Umrechnung durch fortgesetztes Teilen"

Zahl im Dezimalsystem: 207

im Dualsystem: 1 1 0 0 1 1 1 1

Iteration							
1	$\boxed{207}$	=	103	*	2	+	1
2	103	=	51	*	2	+	1
3	51	=	25	*	2	+	1
4	25	=	12	*	2	+	1
5	12	=	6	*	2	+	0
6	6	=	3	*	2	+	0
7	3	=	1	*	2	+	1
8	1	=	0	*	2	+	1

Abbildung 2.2: Umrechnung ins Dualsystem

Zahl im Dezimalsystem: 207

im 5er-Stellenwertsystem: 1 3 1 2

Iteration							
1	$\boxed{207}$	=	41	·	5	+	2
2	41	=	8	·	5	+	1
3	8	=	1	·	5	+	3
4	1	=	0	·	5	+	1

Abbildung 2.3: Umrechnung ins 5er-Stellenwertsystem

Es folgt:

Satz (<u>Satz über die g-adische Darstellung natürlicher Zahlen</u>)

Seien $a, g \in \mathbb{N}$ mit $g > 1$.

Dann kann a eindeutig in der Form

$$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_1 g^1 + a_0 g^0$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i g^i$$

mit $a_i \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ und $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ dargestellt werden.

Bemerkung

Gilt $g-1 > 9$, so reicht die Menge der neun Zahlen $0, \dots, 9$ nicht aus, um die Ziffern der g-adischen Zahl darzustellen.

Man verwendet dann z.B. die Buchstaben des Alphabets.

Bsp: $g = 16$ $\quad a_i \in \{0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

$244 = 15 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 \qquad (244)_{10} = (F4)_{16}$

$$(27AC)_{16} = 2 \cdot 16^3 + 7 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0$$
$$= 8192 + 1792 + 160 + 12 = (10156)_{10}$$

Zahldarstellung				
2^1 2er	2^2 4er	2^3 8er	2^4 16er	10^1 10er
dual	4er	oktal	hexadezimal	dezimal
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
10	2	2	2	2
11	3	3	3	3
100	10	4	4	4
101	11	5	5	5
110	12	6	6	6
111	13	7	7	7
1000	20	10	8	8
1001	21	11	9	9
1010	22	12	A	10
1011	23	13	B	11
1100	30	14	C	12
1101	31	15	D	13
1110	32	16	E	14
1111	33	17	F	15

Fragestellung: $11011110_2 = ?_4$

1. Schritt: $11011110_2 = 11\text{-}01\text{-}11\text{-}10_2$

2. Schritt: $11011110_2 = \mathbf{3\text{-}1\text{-}3\text{-}2_4}$

Lösung: $11011110_2 = \mathbf{3132_4}$

Fragestellung: $1111001101_2 = ?_8$

1. Schritt: $1111001101_2 = 001\text{-}111\text{-}001\text{-}101_2$

2. Schritt: $1111001101_2 = \mathbf{1\text{-}7\text{-}1\text{-}5_8}$

Lösung: $1111001101_2 = \mathbf{1715_8}$

Einladung

Liebe Verwandte und Freunde!

Wir können meinen hexadezimal

32. Geburtstag

feiern. Wem das zu jung vorkommt, der kann ja auch den binär

110010. Geburtstag

mit mir zelebrieren.

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Weshalb braucht man negative Zahlen?

Praxis: z.B. „Schulden"
„unter dem Meeresspiegel"
„Temperatur unter dem Gefrierpunkt"

Mathematik: Zum Lösen bestimmter Gleichungen,

wie z.B.

$$5 = 8 + x$$
$$6 = 9 + x$$
$$7 = 10 + x$$
$$8 = 11 + x$$
$$\vdots$$

Keine dieser Gleichungen ist in $\mathbb{N}$ lösbar, d.h. bei einer Grundmenge $G = \mathbb{N}$ ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\}$.

Hätte man eine Lösung „$x = -3$", so würde sie unendl. viele Gleichungen lösen.

Man kann die „Zahl -3" durch die Zahlenpaare $(1,4)$ ..., $(5,8)$, $(6,9)$, ... beschreiben, wenn man deutlich macht, dass ein solches Zahlenpaar (a,b) für die Lösung x der Gleichung

$$a = b + x$$ steht.

Mit diesem Verständnis über die Bedeutung von Zahlenpaaren kann man nicht nur negative Zahlen darstellen, z.B.

$(8,5)$, $(9,6)$, $(12,9)$ kann man als Darstellung der Lösung x von

$8 = 5+x$, $9 = 6+x$, $12 = 9+x$ auffassen,

also als $x = 3$.

„Geheime Überlegung"

Betrachte zwei Zahlenpaare, die dieselbe Zahl x darstellen: (a,b), (c,d), $a,b,c,d \in \mathbb{N}$

mit $a = b + x$ und $c = d + x$.

$$x = a - b \quad \text{und} \quad x = c - d$$

also gilt $\quad a - b = c - d$

und somit $\quad a + d = b + c$

Wir sind in der Lage <u>nur mit Hilfe der Addition der natürlichen Zahlen</u> festzustellen, ob zwei Zahlenpaare (<u>natürlicher Zahlen</u>) dieselbe Zahl x darstellen.

Satz

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

Sei $R := \{ ((a,b),(c,d)) \mid a+d = b+c \}$

Dann ist die in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definierte Relation R eine Äquivalenzrelation.

[$((a,b),(c,d)) \in R$ kann auch kurz $(a,b) \sim (c,d)$ geschrieben werden, dann gilt

$$(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$$]

Beweis-Skizze: zz. R ist reflexiv, symmetrisch, transitiv

Zur Refl.: zz. $(a,b) \sim (a,b)$ f.a. $a, b \in \mathbb{N}$.

$a+b = b+a$ gilt f.a. $a, b \in \mathbb{N}$ (Kommutativ.)

Zur Sym.: zz. $(a,b) \sim (c,d) \iff (c,d) \sim (a,b)$ f.a. $a,b,c,d \in \mathbb{N}$

Seien $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ mit $(a,b) \sim (c,d)$. Also gilt $a+d = b+c$, wegen der Kommut. d. Add in $\mathbb{N}$ gilt $d+a = c+b$, also $c+b = d+a$, somit $(c,d) \sim (a,b)$.

Zur Trans.: z.z. $\underbrace{(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f)}_{(*)} \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$

Seien $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$ mit $(*)$. Dann gilt

$$a+d = b+c \quad \text{und} \quad c+f = d+e$$

und somit $(a+d)+(c+f) = (b+c)+(d+e)$ und damit

(wegen Kommut.) $a+f+c+d = b+e+c+d$

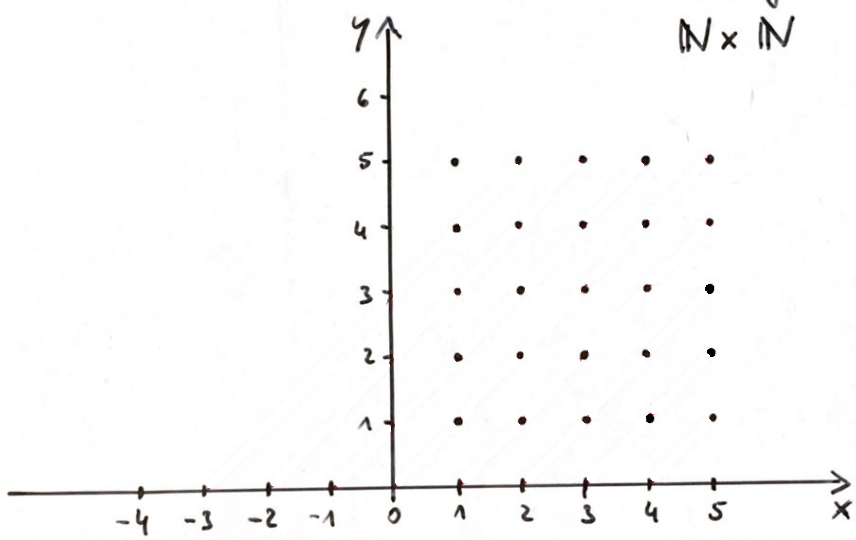
also $a+f = b+e$ und somit $(a,b) \sim (e,f)$ $\square$

Definition: Die Menge der Äquivalenzklassen der in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definierten Relation R mit $(a,b) \sim (c,d) \iff a+d = b+c$ nennt man die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Bezeichnet man mit $[(a,b)]$ die Äquivalenzklasse, die das Element (a,b) enthält, dann ist

$$\mathbb{Z} = \{ [(a,b)] \mid a,b \in \mathbb{N} \}$$

Darstellung der ganzen Zahlen im Gitternetz



Beispiel

- $(3,1) \sim (a,b) \iff 3 + b = 1 + a$

[also $2 = a - b$]

also $(3,1) \sim (5,3) \sim (8,6) \sim (100/98) \sim \ldots$

- $(1,1) \sim (5,5) \sim (2,2) \sim \ldots$ Nullelement

$1 + b = 1 + a \iff a = b$

Definition:

Die Äquivalenzklasse $[(a,a)]$ mit bel. $a \in \mathbb{N}$ wird Nullelement genannt.

Die Äquivalenzklasse $[(a+1,a)]$ mit bel. $a \in \mathbb{N}$ wird Einselement genannt.

Vereinbarung: $[(a,a)] =: \mathbf{0}$, $[(a+1,a)] =: \mathbf{1}$

Rechnen mit ganzen Zahlen

Vorüberlegung: GEHEIM !

$x \quad y$	$x+y$	$x \cdot y$
$(a,b) \quad (c,d)$	$(a,b)+(c,d)$	$(a,b)\cdot(c,d)$
$a=b+x$ $c=d+y$	$x=a-b$ $y=c-d$ (+) $x+y=(a-b)+(c-d)$ $=a+c-(b+d)$	$x\cdot y=(a-b)\cdot(c-d)$ $=ac+bd-(ad+bc)$

Also $\underbrace{a+c}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{b+d}_{\in \mathbb{N}} + x+y$ und $\underbrace{ac+bd}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{ad+bc}_{\in \mathbb{N}} + x\cdot y$

$x+y$ wird dargestellt durch $(a+c, b+d)$ und

$x\cdot y$ wird dargestellt durch $(ac+bd, ad+bc)$.

Definition

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.
Dann definiert man durch

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] := [(a+c, b+d)]$$

eine (die!) __Addition__ und durch

$$[(a,b)] \odot [(c,d)] := [(ac+bd, ad+bc)]$$

eine (die!) __Multiplikation__ in $\mathbb{Z}$.

__Frage__: Sind diese Operationen __wohldefiniert__?
(Also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten?)

__Beispiel__

$$(3,5) \sim (7,9) \quad , \quad (1,4) \sim (4,7)$$

Gilt auch $\quad (3,5) \oplus (1,4) \quad \sim \quad (7,9) \oplus (4,7)$?

$$(4,9) \quad \sim \quad (11,16)$$