Das Fundament der natürlichen Zahlen

Peano - Axiome

[Giuseppe Peano (1858 - 1932), veröffentlicht 1892 unter Berufung auf Dedekind.]

Sei N eine nicht-leere Menge.

P1) Jedem $n \in N$ ist genau ein $n' \in N$ zugeordnet, das der (unmittelbare) Nachfolger von n heißt.

P2) Es gibt ein $a \in N$, das für kein $n \in N$ Nachfolger ist.

P3) Sind $n, m \in N$ verschieden, so sind auch die Nachfolger n' und m' verschieden.
[auch kurz: Aus $n' = m'$ folgt $n = m$.]

P4) Ist M eine Teilmenge von N mit $a \in M$ und enthält M zu jedem Element auch dessen Nachfolger, so gilt: $M = N$.

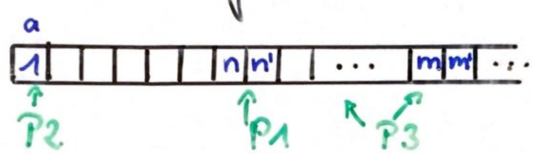
Erfüllt eine Menge N alle vier Axiome, so heißt N die Menge der natürlichen Zahlen und man schreibt dann $\mathbb{N}$ statt N.

Wir def.: $1 := a$, $2 := 1'$, $3 := 2' = 1''$, ...

Bemerkungen

1) Alle Axiome sind notwendig.
z.B. erfüllt $\mathbb{R}_0^+$ ohne (P4) alle restlichen Axiome, wenn $n' := n+1$.

2) Modell für $\mathbb{N}$: z.B. (unendl. langes) Maßband



3) Mengentheoretisch ist eine Einführung von $\mathbb{N}_0$ ebenfalls möglich!

Andeutung: $0 := \emptyset = \{\}$, $n' := n \cup \{n\}$

also $1 := 0' = \{\emptyset\}$, $2 := 1' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ...

Definition:

Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen m und n werden induktiv wie folgt definiert:

Addition: ① $1 + n := n'$

② $m' + n := (m+n)'$

Multiplikation: ① $1 \cdot n := n$

② $m' \cdot n := (m \cdot n) + n$

Betrachtung: Was ist „$m+n$"?

$$1+n = n'$$

$$2+n = 1'+n = (1+n)' = (n')' = n''$$

$$3+n = 1''+n = (1'+n)' = (1+n)'' = n'''$$

$$4+n = 1'''+n = (1''+n)' = (1+n)''' = n''''$$

$$\vdots$$

$$m+n = 1^{\overbrace{''\ldots''}^{(m-1)\text{-mal}}} + n = n^{\overbrace{'''\ldots'''}^{m\text{-mal}}}$$

$m+n$ ist also der m-te Nachfolger von n.

Was ist „$m \cdot n$"?

$$1 \cdot n = n$$

$$2 \cdot n = 1' \cdot n = (1 \cdot n) + n$$

$$3 \cdot n = 2' \cdot n = (2 \cdot n) + n = [(1 \cdot n) + n] + n$$

$$4 \cdot n = 3' \cdot n = (3 \cdot n) + n = [[(1 \cdot n) + n] + n] + n$$

$$\vdots$$

$$m \cdot n = (m-1)' \cdot n = ((m-1) \cdot n) + n = \underbrace{[\ldots[[(1 \cdot n)+n]+n]+\ldots]+\ldots]+n}_{\text{„}m\text{-mal } (+n)\text{"}}$$

$m \cdot n$ ist also die m-malige Addition von n:

$$\underbrace{n+n+\ldots+n}_{m\text{-mal}}$$

Lemma:

Es seien n, m, p beliebige natürliche Zahlen.
Dann gelten die Rechengesetze:

Assoziativgesetze:

$$n + (m + p) = (n + m) + p$$

$$n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$$

Kommutativgesetze:

$$n + m = m + n$$

$$n \cdot m = m \cdot n$$

Distributivgesetze:

$$(n + m) \cdot p = (n \cdot p) + (m \cdot p) = n \cdot p + m \cdot p$$

Vereinbarung: „Punkt-vor-Strich-rechnung"

$$p \cdot (n + m) = (p \cdot n) + (p \cdot m) = p \cdot n + p \cdot m$$

$$= pn + pm$$

Vereinbarung: „Malpunkt" darf ggf. weggelassen werden

(Natürlich nicht zwischen Ziffern! $6 \cdot 3 \neq 63$)

Beweis-Skizze: Kommutativgesetz der Addition

also z.z. $m+n = n+m$ gilt f.a. $n, m \in \mathbb{N}$.

Doppelte (vollst.) Induktion (zuerst nach m, darin eingelagert vollst. Induktion nach n.)

1) Ind.-Anf.: zz. Beh. gilt für $m = 1$.

also zz. ⊛ $1+n = n+1$ gilt f.a. $n \in \mathbb{N}$.

i) Ind.-Anf.: zz. ⊛ gilt für $n = 1$.

also zz. $1+1 = 1+1$. Dies gilt nach Def. d. Add.

ii) Ind.-Ann.: $1+n = n+1$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

iii) Ind.-Schritt: zz. $1+n' = n'+1$

$$n'+1 \underset{\text{Def. Add ②}}{=} (n+1)' \underset{\text{Ind.-Ann.}}{=} (1+n)' \underset{\text{Def. Add ②}}{=} (1'+n) \underset{\text{Def. Nachf.}}{=} 1+1+n \underset{\text{Def. Add ①}}{=} 1+n'$$

⇒ Ind.-Anfang ist bewiesen.

2) Ind.-Ann.: $m+n = n+m$ gilt für ein $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

3) Ind.-Schritt: zz. $m'+n = n+m'$ gilt f.a. $n \in \mathbb{N}$.

3) <u>Ind.-Schritt</u>: z.z. $m'+n = n+m'$ gilt f.a. $n \in \mathbb{N}$.

<u>Zwischenschritt</u>: Wir beweisen zunächst:

(**) $n+m' = (n+m)'$ gilt f.a. $n \in \mathbb{N}$.

i) Ind.-Anfang: z.z. (**) gilt für $n=1$,

also z.z. $1+m' = (1+m)'$

$$1+m' \underset{\text{Def. Nachf.}}{=} 1+1+m \underset{\text{Def. Nachf.}}{=} 1'+m \underset{\text{Def. Add ②}}{=} (1+m)'$$

ii) Ind.-Ann.: $n+m' = (n+m)'$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

iii) Ind.-Schritt: z.z. $n'+m' = (n'+m)'$

$$n'+m' \underset{\text{Def. Add ②}}{=} (n+m')' \underset{\text{Ind.-Ann.}}{=} ((n+m)')' \underset{\text{Def. Add ②}}{=} (n'+m)'$$

$\Rightarrow$ (**) gilt f.a. $n \in \mathbb{N}$.

<u>Nun kann die vollständige Induktion nach m abgeschlossen werden:</u>

$$m'+n \underset{\text{Def. Add ②}}{=} (m+n)' \underset{\text{Ind.-Ann.}}{=} (n+m)' \underset{\substack{\text{(**) gilt nach}\\ \text{2. innerer Induktion}}}{=} n+m'$$

□

Vereinfachung der Notation (durch induktive Def.)

Def. Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$.

$$a^0 := 1$$

$$a^{m'} := \underset{\uparrow}{a^m} \cdot a$$

„m-te Potenz von a"

Es gilt: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}}$.

Lemma:

Seien $a, m, n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Beweis: Durch vollst. Induktion.

In der Schule: Meist mit Pünktchen ...

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}}^{(m+n)\text{-mal}} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{\overbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}}) \cdot (\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}}) \cdot \ldots \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}})}^{\text{Insgesamt } (m \cdot n)\text{-mal „}a\text{"}}}_{n\text{-mal } (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)} = a^{m \cdot n}$$

Exkurs:

Potenzgesetze in der Schule:

Exponent

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Potenz a^n ← Basis

definiert durch $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$ mit $a^0 := 1$.

Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man zusätzlich

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Damit ist a^n nun auch für bel. ganzzahlige Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ definiert.

Rechenregeln:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

4) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \qquad (b \neq 0)$

5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Wurzeln und allgemeine reelle Potenzen

Def. der reellen n-ten Wurzel:

Für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ def. man die n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ als die eindeutige Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ mit $x^n = a$.

Speziell definiert man: $\sqrt[n]{0} = 0$ und schreibt gemäß Konvention für $n = 2$ nur $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.

Definition von Potenzen mit rationalen Exponenten für reelle Basen:

Für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ def. man

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \quad \text{bzw.} \quad a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$ def. man

$$a^{\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}$$

Wurzelgesetze:

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b > 0$

3) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

153 c

Def. „n - Fakultät"

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$.

$1! := 1$

$n! := n \cdot (n-1)!$

(sprich: „n - Fakultät")

Zusätzlich def. wir : $0! := 1$.

Beispiel: Sei $n = 6$.

$6! = 6 \cdot 5!$ mit $5! = 5 \cdot 4!$ mit $4! = 4 \cdot 3!$ mit $3! = 3 \cdot 2!$

mit $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1$ also $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Der Binomische Lehrsatz

Aus der Schule bekannt: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Verallg: Ex. Formel für $(a+b)^n$ für bel. $n \in \mathbb{N}$?

Betrachte Beispiele: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a+b)^4 = \underbrace{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}_{\circledast}$$

$$(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b) = \circledast \cdot a + \circledast \cdot b$$

$$= \quad a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$$

$$+ \qquad a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Pascal'sches Dreieck (Blaise Pascal, 1623–1662)

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
\text{Zeile 1:} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\text{Zeile 2:} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\text{Zeile 3:} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\text{Zeile 4:} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Die Koeffizienten, die man hier erhält nennt man

Binomialkoeffizienten.

Sie werden in der Form $\binom{n}{i}$ [„n über i"] notiert, dabei ist $\binom{n}{i}$ das i-te Element (beginnend mit $i=0$) in der n-ten Zeile (beginnend mit $n=0$)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Nach Vereinbarung gilt also

$$\binom{0}{0} = 1 \ , \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Außerdem setzen wir:

$$\boxed{\binom{n}{i} := 0 \quad \text{für } i < 0 \text{ und } i > n.}$$

Beispiele: $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$$= \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$= 1\,a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + 1\,b^3$$

Allgemeine Formel:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n}$$

Frage:

Gibt es eine Möglichkeit $\binom{n}{i}$ „ökonomisch" zu berechnen?

Vorüberlegung: (Satznummer nach Reiss)

Satz (2.4.1)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq i \leq n$

Dann gilt: $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$

Beweisidee:

Zerlege $(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$

in geeignete Teilsummen (siehe Reiss, S. 54/55).

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right) \cdot (a+b)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-(i-1)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} - \underbrace{\binom{n}{0-1} b^{n+1}}_{=0} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} - \underbrace{\binom{n}{n+1} a^{n+1}}_{=0}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] \cdot a^i b^{n+1-i}$$

$\square$

Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le i \le n$ gilt:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \qquad (*)$$

Beweis durch vollst. Induktion:

1) Ind.-Anfang: z.z. $(*)$ gilt für $n=1$ $\quad (0 \le i \le 1)$

$$1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!\,1!} = 1 \quad \text{und} \quad 1 = \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!\,0!} = 1$$

2) Ind.-Ann.: $(*)$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le i \le n$.

3) Ind.-Schluss: z.z. $\binom{n'}{i} = \frac{n'!}{i!\,(n'-i)!}$ mit $n' = n+1$.

Nach Satz (2.4.1) gilt $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$.

Auf $(*)$ übertragen, ist also folgende Gleichung zu zeigen:

$$\frac{(n+1)!}{i!\,(n+1-i)!} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} + \frac{n!}{(i-1)!\,(\underbrace{n-(i-1)}_{n-i+1})!}$$

Sei zunächst $0 \le i \le n$. Dann rechnet man

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} + \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i+1)!} = \frac{n!\,(n-i+1) + n!\cdot i}{i!\,(n-i+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n-i+1+i)}{i!\,(n+1-i)!} = \frac{n!\,(n+1)}{i!\,(n+1-i)!} = \frac{(n+1)!}{i!\,(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i}$$

Betrachte nun $i = n+1$:

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,(n+1-(n+1))!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,0!}$$

$\square$

Quelle: https://www.google.de/search?q=Lottoschein&client=firefox-b&dcr=0&tbm=isch&source=iu&ictx=1&fir=bpbmuJrTCVMarM%253A%252CwwuM39_6hv4X0M%252C_&usg=__izcuLsx3iP-f1FRijzRJFH891g%3D&sa=X&ved=0ahUKEwiNyIOCuoXYAhVSpaQKHROMAhgQ9QEIMTAC#imgrc=bpbmuJrTCVMarM:
(12.12.2017)

Beispiele:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,(10-7)!} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \overset{4}{\cancel{8}}\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = \underline{\underline{120}}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{2!}\,\cancel{4!}} = \underline{\underline{15}}$$

Bemerkung: **Exkurs**

Interpretation eines Binomialkoeffizienten in der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\binom{49}{6}$ Anzahl der möglichen 6-elementigen Teilmengen einer 49-elementigen Menge.

z.B. gibt $\binom{49}{6}$ die Anzahl aller möglichen Tipps beim Lotto „6 aus 49" an.

Also besitzt eine best. gewählte Zahlenkombination die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}000000072$ aufzutreten

$$\frac{1}{13.983.816} \approx 0{,}0000072\ \%$$

Hinweis: Taschenrechnertaste: $\boxed{nCr}$

Satz: (Binomischer Lehrsatz)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

mit den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Folgerung aus den vorangegangenen Sätzen.