8. Zahlbereiche: Natürliche Zahlen (ℕ)

~> Erste Beschäftigung mit Zahlen in „natürlicher" und sehr anschaulicher Weise.

~> Vielfältige Nutzung:

zur Antwort auf Fragen, wie z.B.:

1. Kardinalzahl — Wie viele?
2. Ordinal- / Ordnungszahl — Wievieltes …?
3. Maßzahl — Wie lang?
4. quantitative Beschreibungen — Wie oft?
5. Für Rechenoperationen
6. Bezeichnung von Objekten

~> In der Didaktik:

Beschäftigung mit den unterschiedlichen Aspekten (z.B. Kardinalzahlaspekt, Ordinalzahlaspekt) der natürlichen Zahlen.

Erste Beschäftigung in „natürlicher" Art:

Beobachtungen und Wünsche:

Addition: $m+n$

- dient der Vorhersage, wie viele Objekte (z.B. Menschen, Tiere, Bälle, ...) man erhält, wenn man m Objekte mit anderen n Objekten zusammenbringt.

- mit dieser Vorstellung verknüpft, sollte natürlich auch gelten $m+n=n+m$ (Kommutativgesetz)

Subtraktion: $n-m=k$

soll äquivalent zu $\underline{n=k+m}$ sein.

- Von n Objekten m wegnehmen und es bleiben k Objekte

$\Leftrightarrow$ Zu k Objekten m Objekte hinzufügen und wir erhalten n Objekte

→ Wir haben die Subtraktion mit Hilfe der Addition ausgedrückt!

Problem: $3-5=-2 \notin \mathbb{N}$

Die Subtraktion ist in $\mathbb{N}$ nicht abgeschlossen.

$\Rightarrow$ Motivation zur Erweiterung des Zahlbereichs

(z.B. reale Bspe.: Minusgrade im Winter, Schulden; Höhe unter dem Meeresspiegel, ...)

Multiplikation $m \cdot n$

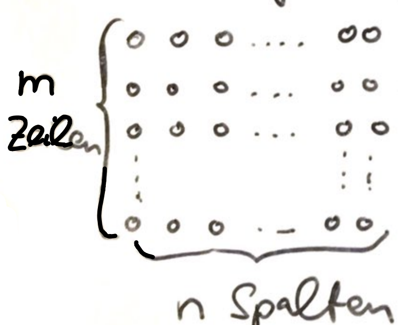
Vorstellung: Mehrfache hintereinander ausgeführte Addition

$$m \cdot n = \underbrace{n+n+\ldots+n}_{m\text{-mal}}$$

Kann man anschaulich begründen, dass gilt:

$$m \cdot n = \underbrace{n+n+\ldots+n}_{m\text{-mal}} = \underbrace{m+m+\ldots+m}_{n\text{-mal}} = n \cdot m \quad ?$$

Trick: Gitterpunkte betrachten



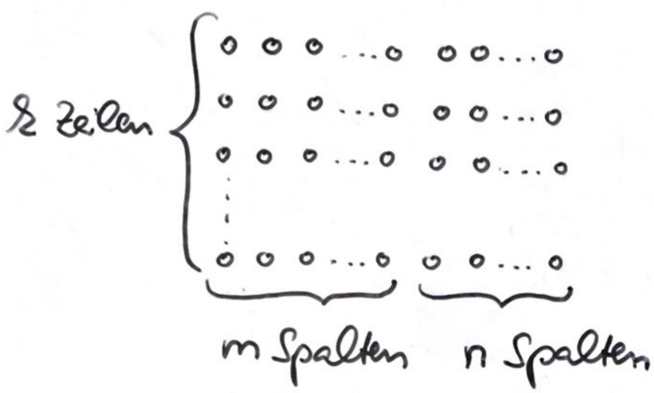
Gesamtzahl der Gitterpunkt best.:

Anzahl d. Pkte. pro Zeile so oft addieren wie es Zeilen gibt.

$\hat{=}$ Anzahl d. Pkte. pro Spalte so oft addieren wie es Spalten gibt.

Anschauliche Begründung des Distributivgesetzes:

$$k \cdot (m+n) = k \cdot m + k \cdot n \qquad \text{f.a. } k, m, n \in \mathbb{N}.$$



Begründungen sind keine Beweise!

Wir werden sehen, dass $\mathbb{N}$ eine <u>unendliche</u> Menge ist.

⇝ <u>Gesucht</u>: Beweismethode für unendliche Mengen.

⇝ Was versteht man eigentlich unter einer unendlichen Menge, was unter einer endlichen?

⇝ Gibt es kleinste / größte Elemente?

<u>Einige Gedanken vorab</u> ...

Anordnung der natürlichen Zahlen

Auf $\mathbb{N}$ ex. eine Ordnungsrelation „$\leq$" (bzw. „$\geq$").

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir

$$\boxed{m \leq n \;:\underset{\text{Def.}}{\iff}\; \underset{k \in \mathbb{N}_0}{\exists} : n = k + m}$$

[Bezüglich des Abzählens bedeutet dies: „m kommt vor n"]
oder „$m = n$", falls $k = 0$

Def. 1

Eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ heißt <u>endlich</u>, falls eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert, mit $m \leq n$ für alle $m \in M$

Weshalb sagen wir nicht einfach: „$M \subset \mathbb{N}$ ist endlich, wenn $|M| = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt"?

<u>Antwort</u>: $\{\}$ soll als endliche Menge gewertet werden, aber die Mächtigkeit von $\{\}$ ist 0 ($0 \notin \mathbb{N}$).

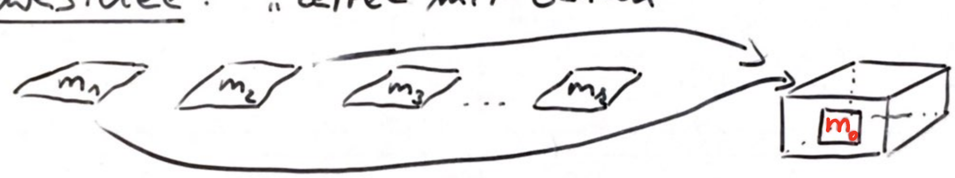
Def. 2

Sei M eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Dann heißt $m_0 \in M$ ein kleinstes Element von M, falls $m_0 \le m$ für alle $m \in M$ gilt.

Satz 1

Jede nicht-leere, endliche Teilmenge M von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Beweisidee: „Zettel mit Zahlen"



1) Lege m_1 in Karton 2) Vergleiche m_2 mit m_1

1. Fall $m_2 < m_1$: m_2 in Karton

2. Fall $m_2 > m_1$: m_1 bleibt im Karton

Nach endlich vielen Schritten liegt die kleinste Zahl im Karton.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ (bel.).

Dann ex. nur endlich viele Zahlen $k \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$.

Sei $M \subset \mathbb{N}$ nicht-leer und endlich. Dann kann man notieren $M = \{m_1, \dots, m_k\}$.

Es sei $m_0 := m_1$. Für $j = 2, \dots, k$ wird jeweils abgefragt, ob $m_j < m_0$ gilt oder nicht.

Falls $m_j < m_0$: $m_0 := m_j$

" $m_j > m_0$: Vergleiche m_{j+1} mit m_0

Das Elt., das nach k Schritten gleich m_0 ist, ist das kleinste Elt. in M. □ 139

Satz 2 **Prinzip des kleinsten Elements**

Jede nicht-leere Teilmenge N von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Beweis:

Sei $N \subset \mathbb{N}$, nicht-leer.

Wähle bel. nat. Zahl $n \in N$.

$N_1 := \{ m \in N \mid m \leq n \}$

N_1 ist nicht leer und endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$.

$\underset{\text{Satz 1}}{\Rightarrow}$ N_1 besitzt ein kleinstes Element m_0.

$N_2 := \{ m \in N \mid m > n \}$

Es gilt $N = N_1 \cup N_2$ mit $m_0 \leq n < m$ f.a. $m \in N_2$, also ist m_0 kleinstes Element von N. $\square$

Nun folgen einige „Gedankenspiele" zu unendlichen Mengen, denn sie verhalten sich oft ganz anders als endliche Mengen!

Gedankenspiele: „Hilberts Hotel"

Man denke sich ein

Hotel mit unendlich vielen Zimmern, die mit natürlichen Zahlen durchnummeriert sind.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ .... $\boxed{181189 1376....}$ ...

Nur Einzelzimmer, voll belegt.

→ In der Nacht kommen 10 weitere Gäste

Kein Problem!

Gast 1	→	Zimmer	11
2	→	"	12
⋮			
n	→	"	10+n
⋮			⋮

Natürlich sind alle Gäste kooperativ und ziehen um. Alle bisherigen Gäste erhalten ein neues Zimmer, da zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $10+n \in \mathbb{N}$ ex.

Alle 10 neuen Gäste können in die nun freien Zimmer 1 bis 10 einziehen.

→ In der Nacht kommt ein Bus mit unendlich vielen Touristen $T_1, T_2, \ldots$

Kein Problem! (Was kann getan werden?)

Bemerkungen:

(i) Die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ ändert sich nicht, wenn man 10, 1000, 100000 Zahlen wegnimmt, z.B. $M = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \ldots, 1000\}$, dann

$$|M| = |\mathbb{N}|$$

(ii) Es gibt „genau so viele" gerade natürliche Zahlen, wie es natürliche Zahlen gibt.

(iii) Es gibt „genau so viele" natürliche Zahlen, wie es durch 5 teilbare natürliche Zahlen gibt.

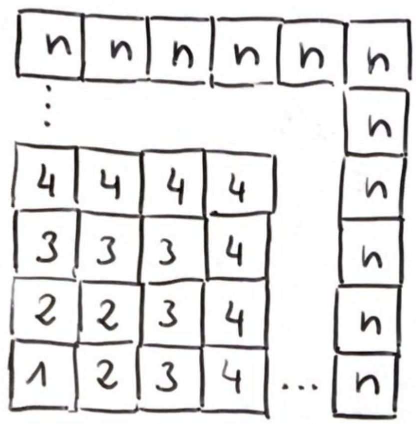
(iv) Man nennt eine Menge abzählbar (unendlich), wenn sie dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt.

(v) Die Mächtigkeit abzählbarer (unendlicher) Mengen wird $\aleph_0$ („Aleph 0") genannt.

(iv) Man kann unendliche Mengen über die Eigenschaft definieren, eine gleichmächtige echte Teilmenge zu haben.

Das Prinzip der vollständigen Induktion

Betrachtung:



$1+3=4 \qquad = 2^2$

$1+3+5=9 \qquad = 3^2$

$1+3+5+7=16 \qquad = 4^2$

$1+3+5+7+9=25 \qquad = 5^2$

$\vdots \qquad \vdots$

$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

Legt man an ein Quadrat mit Seitenlänge n oben und rechts je n Quadrate dazu plus eins in die Ecke, so erhält man ein Quadrat mit Seitenlänge n+1 also $(n+1)^2$ kleine Quadrate:

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

Frage: Gilt $1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$

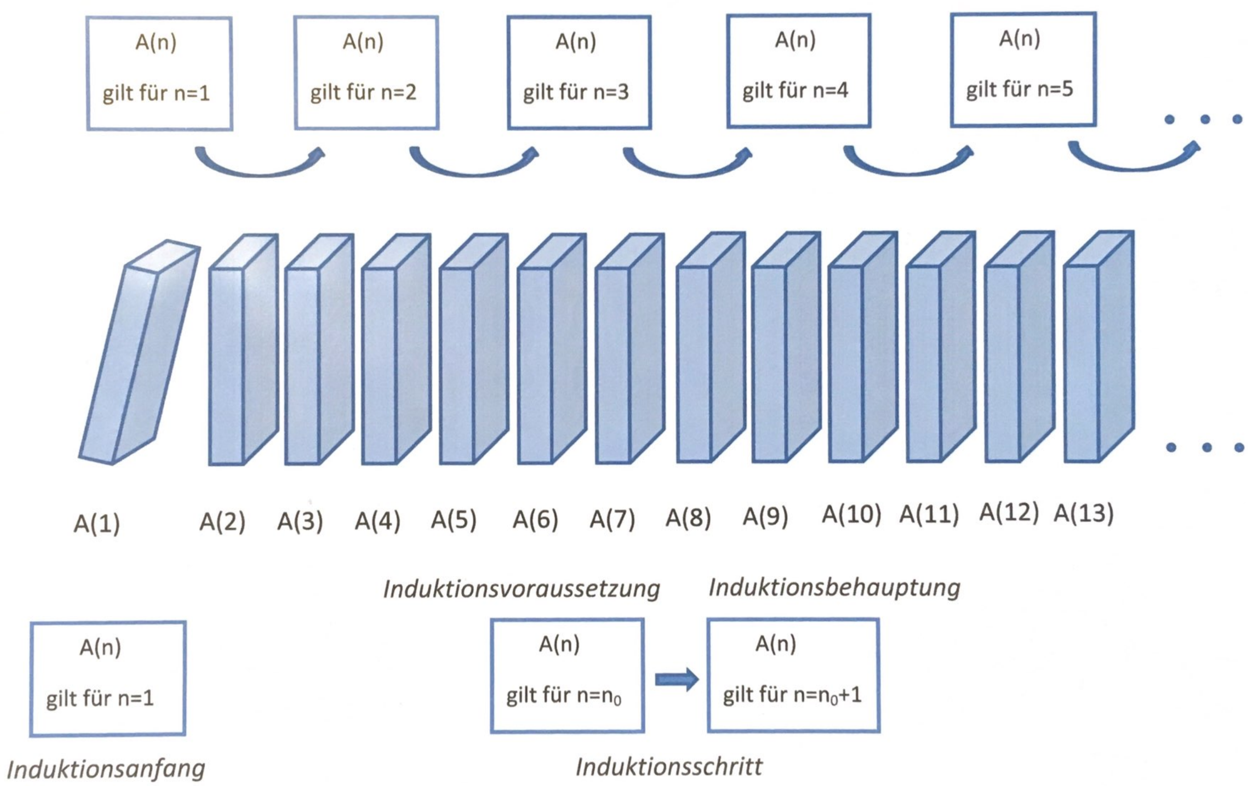
bzw. $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

für alle $n \in \mathbb{N}$?

Unendlich lange zeichnen ist nicht möglich,

wir müssen trickreicher vorgehen!

Idee der vollständigen Induktion



143a

Wir prüfen:

1. Stimmt die Behauptung für $n=1$?
2. Falls die Beh. für n richtig ist, kann man folgern, dass sie auch für $n+1$ stimmt?

Beachte:

Gelten (1) und (2), so muss die Beh. für alle natürlichen Zahlen richtig sein (vgl. später: Peano-Axiome, Axiom (4))

Bew.

Nach (1) gilt die Beh. für $n=1$.

$\underset{(2)}{\Longrightarrow}$ Beh. gilt für $n=2$.

$\underset{(2)}{\Longrightarrow}$ Beh. gilt für $n=3$.

$\vdots$

Gilt die Beh. für ein bel. $n \in \mathbb{N}$? Ja.

Ann: Es ex. eine Zahl n, für die die Beh. nicht gilt.
Dann ex. eine kleinste solche Zahl $m \in \mathbb{N}$.
Wegen (1) gilt $m > 1$, also gilt $m-1 \in \mathbb{N}$
und wegen m minimal, gilt die Beh.
für $m-1$, dann nach (2) aber auch für m. ↯

Beispiel: Induktionsbeweis

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$$

Induktionsanfang: z.z. Die Beh. gilt für $n=1$.

$$\sum_{k=1}^{1} 2k-1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$$

$$1^2 = 1$$

Induktionsannahme: Die Beh. gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n_0} 2k-1 = n_0^2$$

Induktionsschritt/-schluss: z.z. Die Beh. gilt für n_0+1.

$$\sum_{k=1}^{n_0+1} 2k-1 = \underbrace{1+3+\ldots+2n_0-1}_{=\sum_{k=1}^{n_0} 2k-1 \underset{\text{Ind. annahme}}{=} n_0^2} + 2(n_0+1)-1$$

$$= n_0^2 + 2n_0 + 1$$

$$= (n_0+1)^2$$

$\square$

Beispiel: Induktionsbeweis

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsanfang: $\underline{\text{zz.}}$ Die Beh. gilt für $n = 1$.

l.S. $1^2 = 1$

r.S. $\dfrac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \dfrac{2 \cdot 3}{6} = 1$

Induktionsannahme: Die Beh. gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

also gilt $1^2 + 2^2 + \ldots + n_0^2 = \dfrac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}$

Induktionsschritt/-schluss: $\underline{\text{zz.}}$ Die Beh. gilt für n_0+1.

also zz. $1^2 + 2^2 + \ldots + n_0^2 + (n_0+1)^2 = \dfrac{(n_0+1)(n_0+1+1)(2 \cdot (n_0+1)+1)}{6}$

Bew. $\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n_0^2}_{} + (n_0+1)^2 = \dfrac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6} + (n_0+1)^2$

$= \dfrac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}$

Ind.ann.

$$= \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1) + 6(n_0+1)^2}{6} = \frac{(n_0+1)[n_0 \cdot (2n_0+1) + 6(n_0+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n_0+1)[2n_0^2 + n_0 + 6n_0 + 6]}{6} = \frac{(n_0+1)[2n_0^2 + 7n_0 + 6]}{6}$$

<u>Nebenrechnung</u>: $(n_0+2)\cdot(2\cdot(n_0+1)+1)$

$= (n_0+2)\cdot(2n_0+3)$

$= 2n_0^2+3n_0+4n_0+6$

$= \underline{2n_0^2+7n_0+6}$

$$\Rightarrow \frac{(n_0+1)[2n_0^2+7n_0+6]}{6} = \frac{(n_0+1)\cdot(n_0+1+1)(2\cdot(n_0+1)+1)}{6}$$

Insgesamt folgt die Behauptung.

<u>2. Möglichkeit für die Nebenrechnung</u>:

<u>Polynomdivision</u>:

$$\begin{array}{l}
(2n_0^2+7n_0+6):(n_0+2) = 2n_0+3 \\
\underline{-(2n_0^2+4n_0)} \\
\qquad\qquad 3n_0+6 \\
\qquad\quad \underline{-(3n_0+6)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow 2n_0^2+7n_0+6 = (n_0+2)\cdot(2n_0+3)$$

Beispiel: Induktionsbeweis

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$m \cdot n = n \cdot m$$

bei bel. aber fest gewähltem $m \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: z.z. Die Beh. gilt für $n = 1$.

$$m \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m\text{-mal}} = m$$

$$1 \cdot m = m$$

Induktionsannahme: Die Beh. gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

$$m \cdot n_0 = n_0 \cdot m$$

Induktionsschritt/-schluss: z.z. Die Beh. gilt für $n_0 + 1$.

$$m \cdot (n_0 + 1) = \underbrace{(n_0+1) + (n_0+1) + \ldots + (n_0+1)}_{m\text{-mal}}$$

$$\underset{\text{Kommutativgesetz der Add. in } \mathbb{N}}{=} \underbrace{n_0 + n_0 + \ldots + n_0}_{m\text{-mal}} + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{m\text{-mal}} = m \cdot n_0 + m \cdot 1$$

$$\underset{\text{Ind. annahme und Ind. beginn}}{=} n_0 \cdot m + 1 \cdot m = n_0 \cdot m + m = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n_0\text{-mal}} + m$$

$$= \underbrace{m + m + \ldots + m}_{(n_0+1)\text{-mal}} = (n_0 + 1) \cdot m \qquad \square$$