Ergebnisse der
Modulprüfung zur
Elementaren Algebra/Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrer an der FU
Dozent: V.Schulze
Datum: 13 . 12 . 2019 Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Teilnehmer — Note
161275 — 5
2280310 — 2,0
240966 — 1,3
21108119 — 1,3
911 — 4,0
221214 — 2,3
112606 — 2,0
3917 — 2,7
5711 — 1,3
AJT — 3,0
65zdvd97 — 3,7
18 — 2,7
12OST — 4,0
434182 — 5
M18 — 3,7

Aufgabenstellung
Bearbeiten Sie drei der folgenden vier Aufgaben.
Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben,
pro Aufgabe also maximal 10 Punkte; insgesamt also maximal 30 Punkte.
Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Aufgabe 1

(i) Auf $\mathbb{Z}$ sei die Verknüpfung $\bigoplus$ definiert durch
$a \bigoplus b := 2 \cdot a + 2 \cdot b$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.
Ist $(\mathbb{Z}, \bigoplus)$ eine Halbgruppe ?
Man zeige: 0 ist nicht neutrales Element von $(\mathbb{Z}, \bigoplus)$.
(ii) Gegeben sei die Permutation $\pi := (1, 4)(2, 3, 1)$ aus der symmetrischen

Gruppe vom Index 4.
Man stelle π als Produkt elementefremder Zyklen dar.
Sei U die von π erzeugte Untergruppe der symmetrischen Gruppe vom Index 4.
Man gebe eine Untergruppe N der Ordnung 2 von U an.
Ist N Normalteiler von U ?

Aufgabe 2

Die Teilmenge R von $\mathbb{Q}$ sei definiert durch
$R := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b\, ungerade, ggT(a,b) = 1\}$.
(i) Man zeige: R ist Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$.
Man zeige: R ist Unterring von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.
(ii) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ sei definiert durch $f(z) := \frac{z}{2}$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.
Ist f relationstreu bezüglich + ?
Ist f ein Ringhomomorphismus ?

Aufgabe 3

(i) Läßt sich mit Hilfe der Dreierprobe entscheiden, ob die Gleichung $5381 \cdot 111 - 771^2 = 0$ richtig ist ?
Läßt sich mit Hilfe der Neunerprobe entscheiden, ob die Gleichung $5381 \cdot 111 - 771^2 = 0$ richtig ist ?
Ist $5381 \cdot 111 - 771^2$ durch 11 teilbar ?
(ii) Man zeige : Die Kongruenz $x^3 \equiv 3 (mod 7)$ ist nicht lösbar.
Ist $x^{21} \equiv 10 (mod 7)$ lösbar ?

Aufgabe 4

(i) Man zeige : $f(x) := x^3 + 25 \cdot x - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ Nullstelle von $f(x)$.
Man gebe eine Basis der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$ an.
(ii) Man zeige : $g(x) := x^3 + 25 \cdot x - 5 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist irreduzibel.
Sei α Nullstelle von $g(x)$ in einer Körpererweiterung von $\mathbb{Z}_2$.
Wie viel Elemente besitzt der Körper $\mathbb{Z}_2(\alpha)$?