

# Fragenkatalog zur Algebra und Zahlentheorie II

Weiterbildung für Lehrer

Dozent: V.Schulze

## Gruppen

1. Was versteht man unter einer (inneren) Verknüpfung?
2. Wieviel innere Verknüpfungen können auf einer Menge mit zwei Elementen definiert werden?
3. Was versteht man unter einer Halbgruppe bzw. Gruppe?  
Geben Sie Beispiele.
4. Welche Eigenschaften besitzt die Verknüpfungstafel einer endlichen Gruppe?
5. Was versteht man unter der symmetrischen Gruppe vom Index  $n$ ?
6. Was versteht man unter der Ordnung eines Gruppenelementes?  
Geben Sie ein Beispiel.
7. Formulieren Sie den Satz von Lagrange  
und geben Sie eine Beweisskizze.
8. Was versteht man unter einem Normalteiler?  
Geben Sie Beispiele.
9. Was versteht man unter einer Faktorgruppe?  
Geben Sie ein Beispiel.
10. Was versteht man unter einem Gruppen-Homomorphismus?  
Geben Sie ein Beispiel.
11. Formulieren Sie den Homomorphiesatz für Gruppen.  
Geben Sie eine Beweisskizze.

## Ringe

1. Was versteht man unter einem Ring bzw. Integritätsbereich?  
Geben Sie Beispiele.
2. Beweisen Sie die Vorzeichenrechenregeln in einem Ring.
3. Was versteht man unter einer Einheit eines Ringes?  
Geben Sie Beispiele.
4. Was versteht man unter einem Körper?  
Geben Sie Beispiele.
5. Beweisen Sie die Bruchrechenregeln in einem Körper.
6. Was versteht man unter einem Ring-Homomorphismus?
7. Was versteht man unter einem Ideal?  
Geben Sie Beispiele.
8. Was versteht man unter einem Restklassenring?  
Geben Sie Beispiele.
9. Formulieren Sie den Homomorphiesatz für Ringe.

Geben Sie eine Beweisskizze.

10. Welche Restklassenringe von  $\mathbb{Z} \text{ mod } n\mathbb{Z}$  sind Körper?

11. Geben Sie die Einheiten des Restklassenringes von  $\mathbb{Z} \text{ mod } n\mathbb{Z}$  an.

12. Was versteht man unter einem Euklidischen Ring?

Geben Sie Beispiele.

13. Was versteht man unter dem verallgemeinerten Euklidischen Divisionsalgorithmus?

Geben Sie wichtige Eigenschaften an.

## Kongruenzen

1. Was versteht man unter einer Kongruenz?

Geben Sie Beispiele.

2. Darf man Kongruenzen addieren bzw. multiplizieren? Warum?

3. Darf man in Kongruenzen kürzen?

4. Wann ist eine lineare Kongruenz lösbar? Wie kann man gegebenenfalls eine Lösung berechnen? Geben Sie ein Beispiel.

5. Formulieren Sie den Satz von Euler und den kleinen Satz von Fermat.

6. Was besagt der Chinesische Restsatz?

7. Wie ist die Eulersche  $\varphi$ - Funktion definiert?

Geben Sie Rechenregeln an zur Berechnung von  $\varphi(n)$ .

8. Was versteht man unter einer Primitivwurzel  $\text{mod } p$ ?

Geben Sie Beispiele.

9. Was versteht man unter der 3-er, 9-er bzw. 11-er-Probe?

## Polynome

1. Was versteht man unter einem Polynom bzw. Polynomring?

2. Was versteht man unter einer Polynomabbildung?

3. Was versteht man unter dem Einsetzungshomomorphismus?

4. Was versteht man unter einer n-fachen Nullstelle eines Polynoms?

5. Wie kann man die Vielfachheit einer Nullstelle eines Polynoms berechnen?

6. Wie lassen sich die rationalen Nullstellen eines Polynoms mit Koeffizienten aus  $\mathbb{Z}$  berechnen? Geben Sie eine Beweisskizze bzw. ein Beispiel.

7. Was versteht man unter einem irreduziblen Polynom?

8. Geben Sie Irreduzibilitätskriterien für Polynome an.

9. Was versteht man unter einem Minimalpolynom?  
Geben Sie Beispiele.
10. Erläutern Sie die Begriffe algebraisches Element bzw. transzendentes Element. Geben Sie Beispiele.

### **Körper**

1. Was versteht man unter einem Körper? Geben Sie Beispiele.
2. Leiten Sie die Bruchrechenregeln in Körpern her.
3. Was versteht man unter dem Grad einer Körpererweiterung?  
Geben Sie Beispiele.
4. Was versteht man unter einer Ring- bzw. Körperadjunktion?  
Geben Sie Beispiele.
5. Diskutieren Sie Eigenschaften einfach algebraischer Körpererweiterungen.
6. Was besagt die Körpergradformel?
7. Welche reellen Zahlen sind mit Zirkel und Lineal konstruierbar?
8. Geben Sie Beispiele von reellen Zahlen, die nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.
9. Wie läßt sich entscheiden, ob die Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal möglich ist, wenn der cosinus des Winkels rational ist?
10. Was versteht man unter einem Zerfällungskörper?  
Geben Sie Beispiele.
11. Wie läßt sich der Körper der komplexen Zahlen konstruieren?