

Aufgabe W0 (Geradengleichung)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte

$$A = (1, 0, 0), B = (1, 1, 1), C = (0, -1, 1), D = (1, -1, 1)$$

gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Geraden $g = AB$ und $h = CD$!
- (b) Zeigen Sie, dass g und h windschief sind!

Lösungsskizze

- (a) Die Zweipunkteform für Geraden durch die Punkte A und B mit Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lautet:

$$g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Also ist hier $g : \vec{x}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- (b) Die Geraden sind windschief, d.h. liegen nicht in einer Ebene; denn
- (i) g und h sind nicht parallel, d.h. die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, und
 - (ii) g und h schneiden sich auch nicht, d.h. die Gleichung $\vec{x}_g = \vec{x}_h$ hat keine Lösung.

Anmerkung: Alternativ reicht es, zu zeigen: $\det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{d}, \vec{a} - \vec{d}) \neq 0.$