Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik
'Lineare Algebra I'

Aufgabe D7 (Basis, Isomorphismus)

Zeigen Sie ohne Verwendung von Dimensionssätzen:
Sind V und W Vektorräume über dem Körper K, und gilt $V \cong W$, so folgt $\dim_K V = \dim_K W$.
Lösungshinweis: Es reicht (wieso?) der Nachweis, dass unter einem Isomorphismus (also einer bijektiven linearen Abbildung) von V auf W eine Basis von V auf eine Basis von W abgebildet wird.

Lösungsskizze
$V \cong W$ bedeutet, dass ein Isomorphismus $f : V \to W$ existiert. Wir zeigen (gemäß Lösungshinweis), dass für eine Basis B von V die Menge $C := f(B)$ eine Basis von W bildet; da f definitionsgemäß auch bijektiv ist und damit $|B| = |C|$ gilt, folgt damit $\dim_K V = |B| = |C| = \dim_K W$.

$B =: (b_i)_{i\in I}$ ist ein Erzeugendensystem von V und f ist u.a. surjektiv; daher exisiert für $w \in W$ ein $v \in V$ und für alle $i \in I$ Werte $\lambda_i \in K$ (fast alle 0) mit $w = f(v)$ und $v = \sum\limits_{i\in I} b_i\lambda_i$; folglich gilt wegen der Linearität von f dann $w = f(v) = f(\sum\limits_{i\in I} b_i\lambda_i) = \sum\limits_{i\in I} f(b_i)\lambda_i$. Also ist $C = (f(b_i))_{i\in I}$ Erzeugendensystem von W.
Die Vektoren von C sind aber auch linear unabhängig: Aus $\sum\limits_{i\in i} f(b_i)\lambda_i = 0$ ergibt sich $f(\sum\limits_{i\in I} b_i\lambda_i) = 0$ und wegen der Injektivität von f daher $\sum\limits_{i\in I} b_i\lambda_i = 0$, woraus $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$ folgt. $\square$