Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra I'

Aufgabe D3 (Lineare Fortsetzung)

Beweisen Sie den Satz von der linearen Fortsetzung (Satz 13.2 der Vorlesung), also:

Seien V und W Vektorräume (beliebiger Dimension) über dem Körper K, ferner $(b_i)_{i\in I}$ eine geordnete Basis von V und $(w_i)_{i\in I}$ eine (beliebige) Familie von Vektoren aus W (mit gleicher Indexmenge I). Dann gilt:
Es existiert genau ein $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $f(b_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Lösungsskizze:

(i) Existenz: Durch

$$f\Big(\sum_{i\in I} b_i\lambda_i\Big) := \sum_{i\in I} w_i\lambda_i$$

ist eine Abbildung $f : V \to W$ definiert; denn jedes Element aus V hat eine Darstellung der Form $\sum\limits_{i\in I} b_i\lambda_i$ (mit geeigneten $\lambda_i \in K$, von denen nur endlich viele ungleich 0 sind). Diese Abbildung ist linear (Beweis...) und bildet (für alle $i \in I$) den Basisvektor b_i auf w_i ab.

(ii) Eindeutigkeit:
Seien f_1 und f_2 Abbildungen der geforderten Eigenschaft.

Dann ist $f_1 - f_2$ linear (Beweis ...) und es gilt (unter Anwendung der Definition der Differenz zweier Abbildungen)

$$(f_1 - f_2)(b_i) = f_1(b_i) - f_2(b_i) = w_i - w_i = 0 \quad \text{für alle } \ i \in I.$$

Es folgt $(f_1 - f_2)(\sum\limits_{i\in I} b_i\lambda_i) = \sum\limits_{i\in I}(f_1 - f_2)(b_i)\lambda_i = 0$, also $f_1 - f_2 = 0$, d.h. $f_1 = f_2$. $\square$