

## Übung zur Lehrkräfte Weiterbildung 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

**Aufgabe C 1** (Lineare Abhängigkeit, Koordinaten/ Polynome, Matrizen )

1.  $\vec{a} = 1 - x$ ,  $\vec{b} = 1 + x$ ,  $\vec{c} = x$  sind Vektoren im Vektorraum der Polynome über  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  linear abhängig sind. Prüfen Sie, ob die Vektoren  $\vec{b}, \vec{c}$  linear abhängig sind. Ist  $\vec{c}$  allein linear abhängig?

2. Untersuchen Sie, ob im Vektorraum der  $2 \times 2$ - Matrizen über  $\mathbb{R}$  die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Ist  $A$  für sich allein linear unabhängig?

3.  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$  ist eine Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad kleiner gleich 3.

a) Welches Polynom hat bezüglich  $\mathcal{B}$  den Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  ?

b) Wie lautet der zum Polynom  $3 - 2x + 4x^3$  gehörige Koordinatenvektor?

4. Im Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  ist  $\mathcal{C} = \{2, 1 + x, 1 - x^2\}$  Basis.

a) Welches Polynom hat bezüglich  $\mathcal{C}$  den Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ?

b) Wie lautet der Koordinatenvektor des Polynoms  $1 + x + x^2$  bzgl.  $\mathcal{C}$ ?

5. a) Zeigen Sie, dass im Vektorraum der  $2 \times 2$ - Matrizen über  $\mathbb{R}$  die

Menge  $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  eine Basis ist!

b) Welche Matrix hat bez.  $\mathcal{D}$  die Koordinaten  $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$  ?

c) Welche Koordinaten bez.  $\mathcal{D}$  hat die Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$  ?

## Lösungsskizze

1. Die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sind linear abhängig genau dann, wenn es Skalare  $r, s, t \in \mathbb{R}$  gibt, die nicht alle gleich null sind, so dass

$$(*) \quad r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

gilt.

Setzt man o.B.d.A.  $t = -1$ , so ergibt eine Heuristik (Beweisrichtung beachten!) aus Gleichung (\*) die Werte  $r = -\frac{1}{2}$  und  $s = \frac{1}{2}$ . Tatsächlich gilt:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1-x) + \frac{1}{2} \cdot (1+x) = \frac{1}{2} \cdot (-1+x+1+x) = x = \vec{c}.$$

$\vec{c}$  lässt sich somit als Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  darstellen; also sind die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  linear abhängig.

*Alternativ:*  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind Polynome vom Grad 1. Der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 1 hat Dimension 2 (z.B. Basis  $\{1, x\}$ ). Daher sind drei Vektoren dieses Raumes immer linear abhängig.

Die Vektoren  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow s = t = 0.$$

Aus  $s(1+x) + tx = 0$  folgt  $s + (s+t)x = 0$  und damit  $s = 0 = s+t$ , also  $s = t = 0$ . D.h.: die Vektoren  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  sind nicht linear abhängig.

Entsprechend ist auch  $\vec{c}$  linear unabhängig, denn:  $tx = 0 \Rightarrow t = 0$ .

*Anmerkung:* Dies gilt i.A. für jeden vom Nullvektor verschiedenen Vektor.

2. Da  $A$  nicht die Nullmatrix ist, ist  $A$  linear unabhängig.

Aus

$$(sA + tB =) s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} s-t & s+t \\ s+2t & s+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

folgt  $s = t = 0$ . Also sind die Matrizen  $A$  und  $B$  linear unabhängig.

3. a) Das Polynom mit Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\} \text{ ist } -1 + \frac{2}{3}x - 4x^2 + 2x^3.$$

b) Der zum Polynom  $3 - 2x + 4x^3$  bezüglich  $\mathcal{B}$  gehörende Koordinaten-

vektor ist  $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

4. a) Den Koordinatenvektor  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  bezüglich  $\mathcal{C}$  hat das Polynom

$$2 \cdot 2 + (-3) \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 - x^2) = 4 - 3 - 3x + 1 - x^2 = 2 - 3x - x^2.$$

b) Der Koordinatenvektor des Polynoms  $1 + x + x^2$  bzgl.  $\mathcal{C}$  ergibt sich aus

$$r \cdot 2 + s \cdot (1 + x) + t \cdot (1 - x^2) = 1 + x + x^2.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Äquivalenz zu

$$\begin{aligned} 2r + s + t &= 1 \\ s &= 1 \\ -t &= 1 \end{aligned}$$

und damit zu  $r = \frac{1}{2}, s = 1, t = -1$ , also den Koeffizientenvektor  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

5. a) In  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist jedes Element  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eindeutig als Linearkombination der Elemente aus  $\mathcal{D}$  darstellbar:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_3 + x_4 &= a \\ x_1 - x_2 - x_3 &&= b \\ x_1 + x_2 &&= c \\ x_1 &&= d, \end{aligned}$$

das genau eine Lösung hat (die Koeffizientenmatrix ist eine obere Dreiecksmatrix mit nicht-trivialen Diagonalelementen). Daher ist  $\mathcal{D}$  Basis.

(b) Aus den obigen Berechnungen folgt:

$$a = x_1 + x_3 + x_4 = -\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{5} = -\frac{9}{10}$$

$$b = x_1 - x_2 - x_3 = -\frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{3}{2}$$

$$c = x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$d = x_1 = -\frac{1}{2}$$

und damit

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Aus dem Gleichungssystem

$$x_1 = d = -7$$

$$x_2 = c - d = 4 + 7 = 11$$

$$x_3 = -b - c + 2d = -3 - 4 - 14 = -21$$

$$x_4 = a + b + c - 3d = 2 + 3 + 4 + 21 = 30$$

ergibt sich der gesuchte

Koordinatenvektor als

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -21 \\ 30 \end{pmatrix}.$$