

Übung zum Lehrkräfte Weiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra / Analytische Geometrie I'

Aufgabe B2 (Körper, modulares Rechnen)

- (i) Stellen Sie die Verknüpfungstabellen von \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 und \mathbb{Z}_4 auf!

Erinnerung:

$\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist ein Ring mit den Elementen $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ und Addition und Multiplikation modulo m .

- (ii) Welche der drei Ringe \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 und \mathbb{Z}_4 sind Körper?

Hinweis: Die Ringeigenschaften der drei Ringe dürfen Sie hier ohne Beweis voraussetzen!

Lösungsskizze

- (i) (a) \mathbb{Z}_2 :

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

- (b) \mathbb{Z}_3 :

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

- (c) \mathbb{Z}_4 :

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

- (ii) \mathbb{Z}_2 und \mathbb{Z}_3 sind Körper: Sie sind Ringe mit 1, und jedes Element ungleich 0 besitzt eine multiplikative Inverse; außerdem gilt

$$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0,$$

also die Abgeschlossenheit von \mathbb{Z}_i^* (für $i = 1$ und $i = 2$) bei Multiplikation.

\mathbb{Z}_4 ist kein Körper, denn das Element 2 besitzt keine Inverse (und es gibt "Nullteiler": $2 \cdot 2 = 0$, obwohl $2 \neq 0$).