

Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie I'

Aufgabe B1 (Permutationsgruppe, Untergruppe)

- (i) Geben Sie die Elemente der Gruppe $(\mathcal{S}_3, \circ)$ der Permutationen von $\{1, 2, 3\}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung an!
- (ii) Bestimmen Sie zu jedem Element $\tau \in \mathcal{S}_3$ die Ordnung $o(\tau) := |\langle \tau \rangle|$.
- (iii) Geben Sie alle Untergruppen von $(\mathcal{S}_3, \circ)$ und deren Ordnungen an!
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie den folgenden Satz von Lagrange benutzen:
Für jede Untergruppe U einer endlichen Gruppe G ist die Ordnung $|U|$ von U Teiler der Ordnung $|G|$ von G .

Lösungsskizze

- (i) (Vgl. mit Figur 3.3 des Vorlesungsskripts!)
- $$\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
- $$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
- (ii) $o(\text{id}) = 1$; $o(\sigma_i) = 2$ wegen $\sigma_i^2 = \text{id}$ ($i = 1, 2, 3$)
 $o(\delta_j) = 3$ ($j = 1, 2$), da
- $$\delta_1 \circ \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \delta_2$$
- $$\delta_2 \circ \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \delta_1,$$
- $$\delta_1 \circ \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{id}, \quad \delta_1^3 = \delta_1 \circ (\delta_1 \circ \delta_1) = \delta_1 \circ \delta_2 = \text{id}.$$
- (iii) $\{\text{id}\}$ hat Ordnung 1
 $\langle \text{id}, \sigma_i \rangle$ hat Ordnung 2 für $i = 1, 2, 3$.
 $|\langle \text{id}, \delta_1, \delta_2 \rangle| = 3$
 $|\mathcal{S}_3| = 6$.
(Insgesamt 6 Untergruppen). Aus $|\mathcal{S}_3| = 6$ folgt mit dem Satz von Lagrange $|U| \in \{1, 2, 3, 6\}$. Damit kann man sehen, dass es keine weiteren Untergruppen gibt.